

Retno Muslinawati, S.E, M.M

MATEMATIKA EKONOMI II



MATEMATIKA EKONOMI

—
2
—

MATEMATIKA EKONOMI 2

Retno Muslinawati, S.E., M.M.



MATEMATIKA EKONOMI 2

Penulis:

Retno Muslinawati, S.E., M.M.

Editor:

Dimas Surya Atmaja

Desain Cover:

Ahmad Bukhori

Tata Letak:

Ahmad Sofi

ISBN:

978-623-8067-32-9

Cetakan Pertama:

Januari, 2024

Ukuran : 15,5 cm x 23 cm

Jumlah Halaman : xii + 82 halaman

Hak Cipta 2024, Pada Penulis

Hak Cipta Dilindungi Oleh Undang-Undang

Copyright © 2024

by Penerbit Indonesia Imaji

All Right Reserved

Dilarang keras menerjemahkan, memfotokopi, atau memperbanyak sebagian atau seluruh isi buku ini tanpa izin tertulis dari Penerbit.

PENERBIT INDONESIA IMAJI

(Grup CV. Indonesia Imaji)

Jalan Kedunglurah-Ngadirejo, Kedunglurah, Kecamatan Pogalan,

Trenggalek (66371)

Anggota IKAPI No. 292/JTI/2021

Website: www.indonesiaimaji.com

KATA PENGANTAR

Mempelajari matematika ekonomi sangat penting dalam bidang ekonomi pembangunan karena memberikan dasar analisis yang kuat untuk memahami dan mengatasi tantangan ekonomi yang kompleks. Dalam konteks ini, matematika ekonomi 1 memberikan alat dan konsep yang esensial untuk menganalisis perilaku ekonomi agen-agen ekonomi, seperti produsen dan konsumen, serta hubungan antara mereka. Penggunaan model matematika dalam ekonomi pembangunan dapat membantu merumuskan kebijakan yang efektif untuk mencapai pertumbuhan ekonomi yang berkelanjutan.

Matematika ekonomi 1 membekali mahasiswa dengan pemahaman yang mendalam tentang konsep-konsep dasar seperti permintaan, penawaran, elastisitas harga, dan fungsi produksi. Pemahaman ini penting dalam merumuskan

kebijakan ekonomi yang dapat meningkatkan kesejahteraan masyarakat melalui optimalisasi alokasi sumber daya. Selain itu, kemampuan untuk menganalisis data ekonomi menggunakan model matematika dapat membantu dalam merancang kebijakan fiskal dan moneter yang tepat guna untuk mengatasi masalah-masalah ekonomi tertentu, seperti inflasi, pengangguran, dan ketidaksetaraan ekonomi.

Dengan memahami matematika ekonomi 1, para ekonom pembangunan dapat mengidentifikasi potensi pertumbuhan ekonomi, merencanakan investasi yang efektif, dan mengevaluasi dampak kebijakan pembangunan. Analisis matematika juga membantu dalam memahami bagaimana faktor-faktor ekonomi saling berinteraksi dan bagaimana perubahan dalam satu sektor dapat memengaruhi sektor lainnya. Oleh karena itu, matematika ekonomi 1 merupakan landasan penting bagi para ahli ekonomi pembangunan untuk membuat keputusan yang cerdas dan berbasis bukti, yang pada gilirannya dapat membantu meningkatkan kesejahteraan ekonomi masyarakat secara keseluruhan.

Penulis

PRAKATA

Menyusun buku ajar "Matematika Ekonomi II" dalam bidang ekonomi pembangunan memiliki kepentingan yang signifikan dalam mendukung pengembangan pemahaman yang lebih mendalam mengenai konsep-konsep matematika yang relevan dengan konteks ekonomi pembangunan. Buku ajar ini menjadi instrumen kunci untuk membekali mahasiswa atau pembaca dengan alat analisis yang lebih canggih, memungkinkan mereka untuk menghadapi tantangan ekonomi yang semakin kompleks dalam konteks pembangunan.

Buku ajar ini dapat memberikan kontribusi penting dalam memperluas wawasan terhadap metode-metode matematika yang spesifik untuk analisis ekonomi pembangunan. Melalui penyajian yang sistematis dan jelas. Selain itu, buku ajar ini dapat memberikan ilustrasi kasus-kasus empiris yang terkait dengan situasi nyata dalam

konteks ekonomi pembangunan. Hal ini dapat membantu para pembaca mengaplikasikan pengetahuan matematika ekonomi secara praktis untuk menganalisis isu-isu khusus yang dihadapi oleh negara-negara berkembang. Dengan cara ini, buku ajar dapat menjadi panduan yang sangat berharga bagi mahasiswa, peneliti, dan praktisi dalam merancang kebijakan ekonomi yang lebih efektif dan memadai guna mencapai tujuan pembangunan berkelanjutan.

Penyusunan buku ajar "Matematika Ekonomi II" merupakan suatu proses yang melibatkan upaya kolaboratif dan berkelanjutan, di mana kritik dan saran yang membangun memiliki peran krusial untuk meningkatkan kualitas isi dan pemahaman pembaca. Kritik konstruktif dari para rekan sejawat, mahasiswa, dan praktisi ekonomi membantu memperbaiki ketepatan teori dan penerapannya dalam konteks pembangunan. Dalam proses ini, saran-saran yang diberikan akan menjadi landasan untuk penyempurnaan materi sehingga dapat memberikan manfaat optimal dalam pengembangan pengetahuan dan keterampilan.

Ucapan terima kasih tidak hanya terbatas pada kontribusi langsung, tetapi juga melibatkan semua pihak yang turut serta dalam proses ini. Para kontributor, editor, dan reviewer membantu membentuk buku ajar ini menjadi sebuah sumber belajar yang komprehensif dan informatif. Dalam menghargai dukungan dan kontribusi tersebut, penghargaan dan terima kasih disampaikan dengan tulus kepada semua yang telah terlibat dalam memberikan waktunya, pengetahuannya, dan pandangannya.

Secara bersamaan, ucapan terima kasih juga diberikan kepada mahasiswa yang telah memberikan umpan balik berharga dan mengajukan pertanyaan yang mendorong perbaikan. Dengan mengakui peran setiap pihak yang terlibat, buku ajar ini menjadi hasil kolaborasi yang merepresentasikan keberagaman pandangan dan pengalaman, sehingga dapat memenuhi kebutuhan para pembaca dengan lebih baik. Semua kritik, saran, dan kontribusi yang diberikan oleh para pembaca dan pihak terlibat adalah tonggak kesuksesan penyusunan buku ajar ini, dan ucapan terima kasih ini menyatakan penghargaan atas dedikasi dan dukungan yang tak ternilai harganya.

Penulis

DAFTAR ISI

Kata Pengantar	v
Prakata	vii
Daftar Isi	x
BAB 1 GAMBARAN UMUM MATA KULIAH	1
A. Pendahuluan	1
B. Tujuan Instruksional Dan Capaian Pembelajaran	3
C. Rangkuman Materi	5
BAB 2 KERANGKA MATERI	9
A. PENERAPAN INTEGRAL TIDAK TENTU PADA FUNGSI BIAYA.....	9
B. PENERAPAN INTEGRAL TIDAK TENTU PADA FUNGSI PENERIMAAN	11
C. PENERAPAN INTEGRAL TIDAK TENTU PADA FUNGSI PRODUKSI	12
D. PENERAPAN INTEGRAL TIDAK TENTU PADA FUNGSI TABUNGAN	13

E. PENERAPAN INTEGRAL TIDAK TENTU PADA SURPLUS PRODUSEN.....	15
F. PENERAPAN INTEGRAL TIDAK TENTU PADA SURPLUS KONSUMEN.....	18
G. PENERAPAN INTEGRAL TIDAK TENTU PADA SURPLUS KONSUMEN (SK) DAN SURPLUS PRODUSEN (SP) DALAM SATU DIAGRAM	22
H. PENGERTIAN MATRIKS	27
I. PENGERTIAN VEKTOR.....	29
J. PENGOPERASIAN MATRIKS DAN VEKTOR PADA PENJUMLAHAN	31
K. PENGOPERASIAN MATRIKS DAN VEKTOR PADA PENGURANGAN	32
L. PENGOPERASIAN MATRIKS DAN VEKTOR PADA PERKALIAN	33
M. BENTUK MATRIKS.....	34
N. UBAHAN MATRIKS	37
O. DETERMINAN MATRIKS	40
P. ADJOIN MATRIKS	42
Q. ANALISIS INPUT-OUTPUT	44
R. MATRIKS TEKNOLOGI	49
S. METODE CRAMER DALAM PROGRAM LINIER	56
T. METODE ELIMINASI GAUSS JORDAN DALAM PROGRAM LINIER	61
U. METODE SIMPLEK DALAM PROGRAM LINIER.....	68
Daftar Pustaka.....	75
Tentang Penulis	79
Tentang Editor	81

BAB 1

GAMBARAN UMUM MATA KULIAH

A. PENDAHULUAN

Mempelajari mata kuliah Matematika Ekonomi II sangat penting bagi mahasiswa jurusan ekonomi karena memberikan dasar yang kuat dalam penggunaan konsep matematika dalam konteks ekonomi. Mata kuliah ini membantu mahasiswa untuk mengembangkan pemahaman yang mendalam tentang aplikasi matematika dalam analisis ekonomi, termasuk konsep dasar seperti fungsi, limit, dan turunan yang secara esensial digunakan dalam model ekonomi. Selain itu, keterampilan matematika yang diperoleh dari mata kuliah ini memungkinkan mahasiswa untuk memahami dan merumuskan model ekonomi, melakukan analisis data, serta membuat keputusan yang lebih informasional dalam situasi

ekonomi yang kompleks. Kemampuan ini sangat berharga dalam menghadapi tantangan dunia nyata, di mana keputusan ekonomi sering kali melibatkan kompleksitas dan ketidakpastian. Oleh karena itu, pemahaman matematika ekonomi menjadi landasan penting bagi mahasiswa ekonomi untuk berhasil dalam studi lanjutan dan mempersiapkan diri untuk berkontribusi secara signifikan dalam bidang ekonomi dan kebijakan.

Selain itu, pemahaman matematika ekonomi juga membuka pintu bagi mahasiswa untuk menguasai teknik-teknik analisis yang lebih canggih dalam ekonometrika, pemodelan perilaku konsumen, dan pengambilan keputusan ekonomi. Mata kuliah ini memberikan dasar yang diperlukan untuk memahami dan mengaplikasikan metode statistik dalam penelitian ekonomi, membantu mahasiswa mengembangkan keterampilan kritis dalam pengolahan dan interpretasi data empiris. Dengan demikian, mahasiswa yang mempelajari matematika ekonomi tidak hanya akan memiliki pemahaman yang lebih mendalam tentang dasar-dasar teori ekonomi, tetapi juga kemampuan praktis untuk menerapkan konsep-konsep ini dalam situasi dunia nyata.

Pentingnya mata kuliah Matematika Ekonomi II juga terletak pada keterkaitannya dengan pengembangan pemikiran analitis dan logis mahasiswa. Proses pemecahan masalah yang diajarkan dalam mata kuliah ini membantu mahasiswa untuk mengasah kemampuan berpikir kritis, analisis, dan pemecahan masalah, yang merupakan keterampilan yang sangat dihargai di berbagai sektor pekerjaan. Selain itu, penguasaan matematika ekonomi

membuka peluang bagi mahasiswa untuk terlibat dalam riset ekonomi yang inovatif dan berkontribusi pada pengembangan pengetahuan dalam disiplin ilmu ekonomi. Dengan demikian, mahasiswa yang memahami dan menguasai Matematika Ekonomi II tidak hanya mendapatkan keunggulan akademis, tetapi juga mempersiapkan diri untuk tantangan yang lebih kompleks dalam karier profesional mereka, baik di sektor bisnis, pemerintahan, maupun lembaga penelitian.

B.TUJUAN INSTRUKSIONAL DAN CAPAIAN PEMBELAJARAN

Tujuan Instruksional dalam mata kuliah Matematika Ekonomi II merujuk pada pernyataan yang jelas dan terukur mengenai keterampilan dan pengetahuan yang diharapkan mahasiswa dapat capai setelah menyelesaikan kursus ini. Dalam konteks ini, tujuan instruksional dapat mencakup pemahaman yang lebih mendalam tentang konsep-konsep matematika yang lebih kompleks dalam analisis ekonomi, penerapan metode-metode matematika lanjutan dalam konteks kebijakan ekonomi, dan pengembangan keterampilan pemecahan masalah yang lebih kompleks menggunakan alat matematika.

Sementara itu, Capaian Pembelajaran menyoroti hasil konkret yang diharapkan siswa dapat tunjukkan setelah menyelesaikan mata kuliah Matematika Ekonomi II. Ini bisa mencakup kemampuan untuk mengembangkan model matematika yang lebih rumit, menginterpretasikan dan menggunakan hasil analisis matematika dalam situasi ekonomi yang lebih kompleks, serta kemampuan untuk

berpikir kritis dan kreatif dalam menghadapi tantangan ekonomi modern.

Capaian pembelajaran dalam mata kuliah Matematika Ekonomi II dapat dijelaskan sebagai kemampuan mahasiswa untuk memahami dengan mendalam materi pembelajaran dan menerapkannya secara efektif. Mahasiswa diharapkan mampu menguasai konsep-konsep matematika tingkat lanjut, seperti integral, diferensiasi parsial, dan persamaan diferensial, serta menerapkan konsep-konsep ini dalam konteks analisis ekonometrik yang lebih kompleks. Selain itu, mahasiswa diharapkan dapat mengembangkan model matematika yang lebih rumit untuk menggambarkan fenomena ekonomi yang realistis, memahami dan menginterpretasikan hasil analisis matematika dalam konteks kebijakan ekonomi, serta mengaplikasikan metode matematika dalam analisis risiko dan ketidakpastian ekonomi. Capaian pembelajaran ini menekankan pada kemampuan mahasiswa untuk mengaitkan teori matematika dengan aplikasinya dalam konteks ekonomi yang sesungguhnya. Dengan demikian, mahasiswa tidak hanya diharapkan memahami konsep secara teoritis, tetapi juga mampu mengimplementasikannya dalam situasi yang lebih kompleks dan nyata. Keseluruhan, capaian pembelajaran ini mencerminkan kemampuan mahasiswa untuk mengintegrasikan pengetahuan matematika yang diperoleh dalam konteks analisis ekonomi tingkat tinggi dan membuat keputusan informasional yang relevan.

Capaian pembelajaran dalam mata kuliah Matematika Ekonomi II dirumuskan sebagai kemampuan mahasiswa untuk memahami dengan baik, menerapkan secara efektif,

serta mampu menganalisis dan mengaplikasikan materi yang diajarkan. Mahasiswa diharapkan dapat menguasai konsep-konsep matematika tingkat lanjut, seperti integral, diferensiasi parsial, dan persamaan diferensial, dan kemudian dapat mengaplikasikan konsep-konsep ini dalam konteks analisis ekonometrik yang lebih kompleks. Selain itu, mahasiswa diharapkan dapat mengembangkan kemampuan analitis yang tinggi untuk menganalisis hasil dari model matematika yang mereka terapkan dalam situasi ekonomi yang lebih realistis. Capaian pembelajaran ini menekankan pada keterampilan praktis mahasiswa dalam mengimplementasikan konsep matematika dalam solusi masalah ekonomi yang kompleks. Mahasiswa diharapkan mampu memahami secara mendalam bagaimana konsep-konsep matematika ini dapat digunakan untuk memodelkan dan menganalisis fenomena ekonomi yang lebih rumit. Selain itu, mahasiswa diharapkan dapat mengaplikasikan metode matematika dalam menganalisis risiko dan ketidakpastian ekonomi, serta mampu membuat keputusan informasional yang tepat. Dengan capaian pembelajaran ini, diharapkan mahasiswa tidak hanya memiliki pemahaman teoritis yang kuat, tetapi juga keterampilan praktis yang diperlukan untuk sukses dalam menerapkan matematika dalam konteks analisis ekonomi tingkat tinggi.

C. RINGKASAN MATERI

Integral tidak tentu merupakan konsep dalam kalkulus yang merujuk pada proses menemukan fungsi kebalikan dari turunan suatu fungsi. Dalam matematika, turunan dan

integral saling terkait, dan integral tidak tentu berperan dalam mengembalikan fungsi asal dari turunan suatu fungsi. Notasi umum yang digunakan untuk menyatakan integral tidak tentu adalah $\int f(x) dx$, di mana $f(x)$ adalah fungsi yang akan diintegrasikan dan dx menunjukkan variabel integrasi. Proses ini melibatkan mencari fungsi yang, ketika diturunkan, menghasilkan fungsi asal. Integral tidak tentu memiliki berbagai penerapan dalam berbagai disiplin ilmu, seperti fisika, ekonomi, dan teknik. Contoh penerapannya melibatkan perhitungan luas di bawah kurva, penentuan fungsi kebijakan moneter, dan analisis sirkuit listrik, memberikan dasar untuk memahami perubahan dan keterkaitan dalam berbagai fenomena matematis dan fisik.

Dalam matakuliah Matematika Ekonomi II, matriks menjadi konsep kunci yang digunakan untuk menganalisis dan memodelkan sistem ekonomi. Matriks adalah himpunan angka yang disusun dalam baris dan kolom, dan aplikasinya sangat relevan dalam menyusun model matematika untuk menggambarkan hubungan antarvariabel ekonomi. Misalnya, matriks dapat digunakan untuk merepresentasikan sistem persamaan linier yang menggambarkan ketergantungan antarvariabel ekonomi, seperti produksi, konsumsi, dan investasi. Selain itu, dalam analisis input-output, matriks dapat digunakan untuk mengukur dampak perubahan pada suatu sektor terhadap sektor-sektor lain dalam suatu perekonomian. Dengan menggunakan konsep matriks, mahasiswa dapat mengembangkan pemahaman yang lebih mendalam tentang struktur dan dinamika sistem ekonomi, serta menerapkan metode matematika untuk melakukan

analisis dan perhitungan yang relevan dalam konteks ekonomi.

Dalam matakuliah Matematika Ekonomi II, analisis input-output menjadi salah satu pokok bahasan yang penting. Analisis ini merupakan suatu pendekatan matematis yang digunakan untuk memahami hubungan antarindustri atau sektor ekonomi dalam suatu perekonomian. Dengan menerapkan konsep matriks input-output, mahasiswa dapat menyusun model matematika yang menggambarkan aliran barang dan jasa antarberbagai sektor ekonomi. Analisis input-output memungkinkan kita untuk menentukan dampak perubahan pada suatu sektor terhadap sektor-sektor lain, baik dalam hal produksi maupun penggunaan sumber daya. Informasi ini sangat bermanfaat dalam perencanaan ekonomi, kebijakan fiskal, dan pengembangan strategi pertumbuhan ekonomi. Melalui penerapan analisis input-output, mahasiswa dapat memahami kompleksitas struktur ekonomi suatu negara atau wilayah, serta mengidentifikasi potensi dampak dari berbagai kebijakan ekonomi yang mungkin diimplementasikan.

Linier Programming (Programasi Linier) merupakan konsep penting dalam matakuliah Matematika Ekonomi II yang digunakan untuk mengoptimalkan pemakaian sumber daya dalam kondisi terbatas. Dalam konteks ekonomi, linier programming membantu menganalisis dan merancang keputusan yang optimal dalam situasi di mana terdapat keterbatasan pada faktor-faktor tertentu, seperti anggaran, waktu, atau kapasitas produksi. Konsep ini melibatkan penyusunan model matematis berupa fungsi tujuan yang

harus dioptimalkan dengan mempertimbangkan sejumlah kendala atau batasan linier. Solusi dari masalah linier programming memberikan gambaran tentang alokasi sumber daya yang paling efisien dan menguntungkan untuk mencapai tujuan tertentu. Penerapan linier programming dalam matakuliah Matematika Ekonomi II membekali mahasiswa dengan keterampilan analitis yang diperlukan dalam pengambilan keputusan ekonomi yang rasional dan efisien dalam berbagai situasi praktis.

BAB 2

KERANGKA MATERI

A. PENERAPAN INTEGRAL TIDAK TENTU PADA FUNGSI BIAYA

Penerapan integral tidak tentu pada fungsi biaya merupakan suatu konsep dalam kalkulus yang digunakan untuk menentukan biaya total produksi atau kegiatan bisnis. Dalam konteks ini, integral tidak tentu sering kali diterapkan pada fungsi biaya untuk mendapatkan fungsi biaya total atau biaya akumulatif. Fungsi biaya sendiri mencerminkan hubungan antara biaya produksi dan jumlah output atau kegiatan yang dilakukan (Kusuma, et al 2023). Dengan menggunakan integral tidak tentu pada fungsi biaya, kita dapat menghitung biaya total yang dikeluarkan perusahaan untuk suatu tingkat produksi tertentu tanpa harus

mengetahui fungsi biaya eksplisitnya. Hal ini memberikan fleksibilitas dalam analisis biaya dan membantu manajer dalam pengambilan keputusan terkait optimalisasi produksi dan pengeluaran (Catio, 2020).

Fungsi Biaya

Biaya total = $C = f(C)$

Biaya marginal = $MC = C' = \frac{dC}{dQ} f'(Q)$

Sehingga : $C = \int MC \, dQ = \int f'(Q) \, dQ$

Contoh :

Carilah persamaan biaya total dan biaya rata-ratanya, bila diketahui

$$MC = 3Q^2 - 6Q + 4$$

Penyelesaian :

Biaya total :

$$\begin{aligned} C &= \int MC \, dQ \\ &= \int (3Q^2 - 6Q + 4) \, dQ \\ &= Q^3 - 3Q^2 + 4Q + k \end{aligned}$$

Biaya rata-rata : $\frac{C}{Q} = \frac{Q^3 + 3Q^2 + 4Q + k}{Q} = Q^2 - 3Q + 4 + k/Q$

Konstanta 'k' adalah biaya tetap. Jika diketahui $k = 4$ maka :

$$\begin{aligned} C &= Q^3 - 3Q^2 + 4Q \\ AC &= Q^2 - 3Q + 4 \end{aligned}$$

B. PENERAPAN INTEGRAL TIDAK TENTU PADA FUNGSI PENERIMAAN

Penerapan integral tidak tentu pada fungsi penerimaan melibatkan konsep dasar dalam kalkulus, di mana integral tidak tentu atau antiderivatif dari suatu fungsi digunakan untuk menghitung fungsi penerimaan. Fungsi penerimaan umumnya menggambarkan perubahan atau laju perubahan suatu besaran terhadap waktu (Mesra, 2016). Dengan menerapkan integral tidak tentu, kita dapat menemukan fungsi asal atau fungsi yang memberikan nilai penerimaan tersebut. Proses ini memungkinkan kita untuk memahami secara matematis bagaimana suatu besaran berubah seiring waktu dan memberikan wawasan tentang pola perilaku sistem yang terkait. Penerapan integral tidak tentu pada fungsi penerimaan menjadi penting dalam konteks analisis ekonomi, fisika, dan berbagai bidang lainnya di mana pemahaman perubahan besaran terhadap waktu sangat diperlukan (Sari, et al 2022).

Fungsi Penerimaan

Penerimaan total : $R = f(Q)$

Penerimaan Marginal : $MR = R' = \frac{dR}{dQ} = f'(Q)$

Sehingga :

$$R = \int MR \, dQ = \int f'(Q) \, dQ$$

Contoh :

Bila penerimaan perusahaan $MR = 16 - 4Q$, carilah persamaan penerimaan total dan penerimaan rata-rata

Penyelesaian :

$$\text{Penerimaan total : } \int MR \, dQ = \int (16 - 4Q) \, dQ = 16Q - 2Q^2$$

$$\text{Penerimaan rata-rata : } \frac{R}{Q} = \frac{16Q - 2Q^2}{Q} = 16 - 2Q$$

C. PENERAPAN INTEGRAL TIDAK TENTU PADA FUNGSI PRODUKSI

Penerapan integral tidak tentu pada fungsi produksi melibatkan konsep integral tak tentu atau antiturunan dalam konteks analisis ekonomi. Fungsi produksi menggambarkan hubungan antara input faktor produksi dan output suatu perusahaan. Dengan menerapkan integral tidak tentu pada fungsi produksi, kita dapat menghitung fungsi biaya. Dalam konteks ini, integral tak tentu dapat digunakan untuk menentukan biaya total yang dihasilkan oleh suatu tingkat produksi tertentu. Proses ini melibatkan mengintegrasikan fungsi produksi terhadap satu variabel, biasanya variabel output atau tingkat produksi. Hasil integral tak tentu dari fungsi produksi memberikan fungsi biaya, yang mencerminkan total biaya yang dikeluarkan untuk mencapai tingkat produksi tertentu. Penerapan integral tidak tentu pada fungsi produksi membantu menganalisis aspek ekonomi yang terkait dengan produksi, termasuk pengambilan keputusan terkait optimalisasi produksi dan biaya (Kadim, 2017).

Fungsi Produksi

Penerimaan total : $P = f(x)$

Penerimaan Marginal : $MP = P' = \frac{dP}{dx} = f'(x)$

dimana $P = \text{Out put}$

Sehingga : $P = \int MP \, dx = \int f'(x) \, dx$ $x = \text{in put}$

Contoh :

Produk Marginal suatu perusahaan dicerminkan oleh perusahaan

$$MP = 18x - 3x^2$$

Carilah persamaan produk total dan produk rata-ratanya

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} \text{Produk total : } P &= \int MP \, dx \\ &= \int (18x - 3x^2) \, dx \\ &= 9x^2 - x^3 \end{aligned}$$

D. PENERAPAN INTEGRAL TIDAK TENTU PADA FUNGSI TABUNGAN

Penerapan integral tidak tentu pada fungsi tabungan melibatkan konsep integral matematika dalam konteks tabungan. Dalam hal ini, integral tidak tentu digunakan untuk menghitung perubahan jumlah tabungan seiring waktu. Fungsi tabungan dapat direpresentasikan sebagai suatu fungsi matematika, dan integral tidak tentu dari fungsi tersebut dapat memberikan nilai fungsi asalnya. Dengan kata

lain, integral tidak tentu pada fungsi tabungan memungkinkan kita untuk menemukan nilai tabungan pada suatu waktu tertentu atau menghitung pertumbuhan tabungan sepanjang periode waktu tertentu. Hal ini dapat memberikan wawasan tentang bagaimana tabungan berkembang seiring berjalannya waktu dan dapat digunakan dalam perencanaan keuangan atau analisis ekonomi (Huzaemah, 2016).

Fungsi Konsumsi dan Fungsi Tabungan

Fungsi Konsumsi (C) dan Fungsi Tabungan (S) dinyatakan fungsional terhadap y (pendapatan nasional), yaitu :

$$C = f(y) + a + by$$

$$MPC = C' \frac{dc}{dy} = f'(y) = b$$

karena $y = C + S$, maka

$$S = g(y) = -a + (1-b) y$$

$$MPS = S' = \frac{dS}{dY} = g'(y) = (1-b)$$

Dengan demikian :

$$\begin{aligned} C &= \int MPC \, dy = F(y) + k \\ S &= \int MPS \, dy = G(y) + k \end{aligned}$$

Contoh :

Carilah fungsi konsumsi dan fungsi tabungan jika $MPC = 0,8$ dan $a = 30$ milyar maka :

$$C = \int MPC \, dy = \int 0,8 \, dy = 0,8y + 30 \text{ milyar}$$

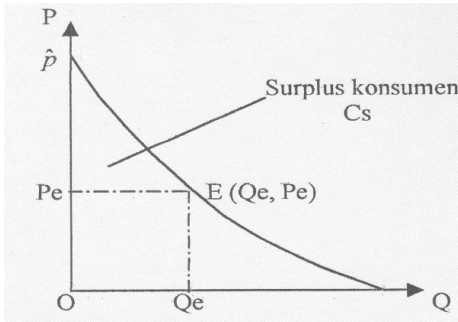
$$S = \int MPS \, dy = \int 0,8 \, dy = 0,8y + 30 \text{ milyar}$$

$$S = y - C = y - (0,8 + 30m) = y - 0,8y - 30m = 0,2y - 30m$$

E. PENERAPAN INTEGRAL TIDAK TENTU PADA SURPLUS PRODUSEN

Penerapan integral tidak tentu pada surplus produsen melibatkan konsep integral dalam konteks ekonomi mikro, khususnya dalam analisis surplus produsen. Surplus produsen merupakan selisih antara total pendapatan yang diterima oleh produsen dari penjualan suatu jumlah barang dengan biaya produksi barang tersebut. Dalam konteks ini, integral tidak tentu digunakan untuk menghitung fungsi keuntungan atau surplus produsen (Safri, 2018). Fungsi keuntungan tersebut dapat diperoleh dengan mengintegrasikan fungsi biaya produksi terhadap jumlah barang yang diproduksi. Dengan menggunakan integral tidak tentu, kita dapat menemukan persamaan matematis yang menggambarkan hubungan antara jumlah barang yang diproduksi dan surplus produsen. Penerapan konsep ini membantu dalam menganalisis dampak perubahan produksi terhadap surplus produsen, sehingga dapat memberikan wawasan yang lebih mendalam dalam pengambilan keputusan ekonomi di tingkat produsen (Ramadhanty, et al 2023).

Surplus konsumen (Consumer's Surplus = Cs)



Mencerminkan suatu keuntungan lebih yang dinikmati oleh konsumen tertentu berkenaan dengan tingkat harga pasar suatu barang.

Dalam definisi lain :

Surplus konsumen (consumer surplus) ialah manfaat bersih yang disadari konsumen ketika mereka mampu membeli barang dengan harga ekuilibrium. Di dalam sebuah grafik, ini setara dengan perbandingan antara harga maksimum yang konsumen mampu membayar dan harga yang sebenarnya mereka bayar buat unit barang yang dibeli. Surplus konsumen untuk produk yaitu nol pada saat permintaan atas produk itu elastis sempurna (kurva permintaan berupa garis horizontal).

Besarnya Surplus Konsumen

Cara :

$$1) \quad C_s = \int_0^{Q_e} f(Q) \, dQ - Q_e \cdot P_e$$

$$2) \quad C_s = \int_{P_e}^P f(P) \, dP$$

Dengan demikian :

$$C_s = \int_0^{Q_e} f(Q) dQ - Q_e \cdot P_e = C_s = \int_{P_e}^P f(P) dP$$

Contoh :

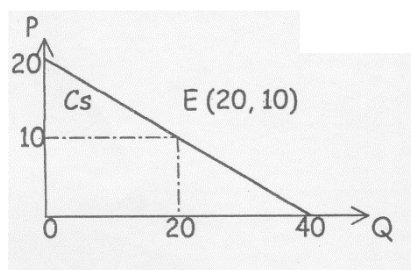
Fungsi permintaan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan $Q = 40 - 2P$ dengan tingkat harga pasar = 10. Hitunglah Surplus konsumen dengan dua cara.

Penyelesaian :

$$Q = 40 - 2P \Rightarrow 2P = 40 - Q \rightarrow P = 20 - 1/2Q$$

$$\text{Diketahui } P_e = 10 \text{ maka } Q = 40 - 2P$$

$$= 40 - 2(10) \rightarrow \text{sehingga } Q_e = 20$$



Cara Pertama :

$$\begin{aligned} C_s &= \int_0^{Q_e} f(Q) dQ - Q_e \cdot P_e \\ &= \int_0^{20} (20 - \frac{1}{2}Q) dQ - (20) \cdot (10) \\ &= [20Q - 1/4Q^2]_0^{20} - 200 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \{ [20(20) - \frac{1}{4} (20)^2] - [20(0) - \frac{1}{4} (0)^2] \} - 200 \\
&= [400 - 100] - [0] - 200 \\
&= 100
\end{aligned}$$

Cara Kedua :

$$\begin{aligned}
C_s &= \int_{P_e}^P f(P) dP &&= \int_{10}^{20} (40 - 20P) dP \\
&&&= [40P - P^2]_{10}^{20} \\
&&&= \{ [40(20) - 20^2] - [40(10) - 10^2] \} \\
&&&= [800 - 400] - [400 - 100] \\
&&&= 400 - 300 \\
&&&= 100
\end{aligned}$$

F. PENERAPAN INTEGRAL TIDAK TENTU PADA SURPLUS KONSUMEN

Penerapan integral tidak tentu pada surplus konsumen berkaitan dengan penggunaan konsep integral dalam ekonomi untuk mengukur surplus konsumen. Surplus konsumen merupakan perbedaan antara harga maksimum yang bersedia dibayar oleh konsumen untuk suatu barang atau jasa dengan harga yang sebenarnya dibayar. Dalam konteks ini, integral tidak tentu digunakan untuk menghitung nilai dari fungsi permintaan atau kurva permintaan, yang menunjukkan hubungan antara harga dan jumlah barang yang diminta oleh konsumen (Kusuma, et al 2023). Dengan menggunakan integral tidak tentu, kita dapat menghitung luas area di bawah kurva permintaan hingga batas atas yang ditentukan oleh harga yang bersedia dibayar oleh konsumen. Hasil integral ini mencerminkan surplus konsumen, yang

merupakan kelebihan nilai yang diterima konsumen karena membayar harga yang lebih rendah daripada yang mereka maksimum bersedia bayar. Penerapan integral tidak tentu pada surplus konsumen memberikan alat matematis yang kuat untuk menganalisis efisiensi pasar dan dampak kebijakan harga terhadap kesejahteraan konsumen (Safri, 2018).

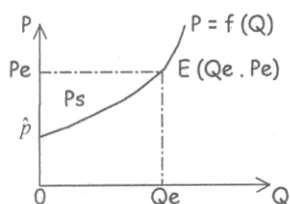
Surplus produsen (Producers Surplus)

(Produsen Surplus) merupakan keuntungan lebih yang dinikmati oleh produsen tertentu berkenaan dengan tingkat harga pasar dari barang yang ditawarkan.

Dalam definisi lain :

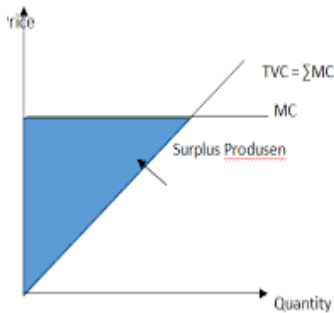
Pengertian surplus produsen adalah manfaat yang diterima oleh perusahaan ketika harga ekuilibrium lebih tinggi daripada harga terendah yang dapat mereka terima di dalam menghasilkan barang tersebut. Harga terendah yang siap perusahaan terima yakni biaya buat memproduksi unit tambahan barang atau biaya marjinal. Surplus produsen ialah keuntungan yang dicapai produsen ketika mereka dapat menjual barang yang melebihi harga terendah yang bersedia mereka terima.

Cara Pertama :



$$Ps = Q_e \cdot P_e - \int_0^{Q_e} f(Q) dQ$$

Cara Kedua :



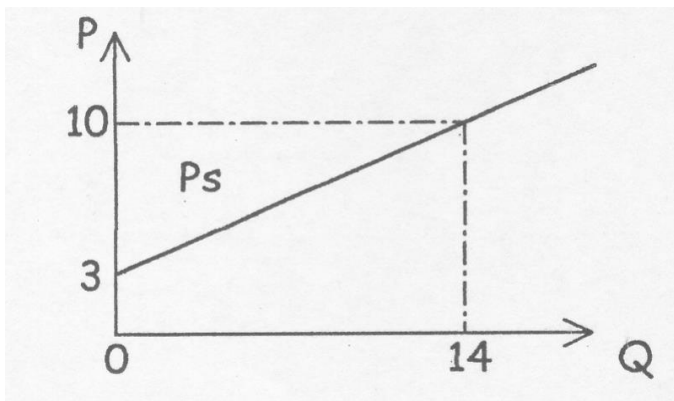
$$P_s = \int_P^{P_e} f(P) dP$$

Contoh :

Seorang produsen mempunyai fungsi penawaran $P = \frac{1}{2}Q + 3$. Hitunglah surplus produsen dengan dua cara, jika harga keseimbangan sebesar 10.

$$\text{maka : } P = \frac{1}{2}Q + 3 \rightarrow -\frac{1}{2}Q = 3 - P \rightarrow Q = -6 + 2P$$

$$P_e = 10 \rightarrow Q_e? \quad Q = -6 + 2P = -6 + 2(10) = 14 \rightarrow Q_e$$



Cara pertama :

$$\begin{aligned} P_s &= Q_e \cdot P_e - \int_0^{Q_e} f(Q) \, dQ \\ &= 14 \cdot (10) - \int_0^{14} (1/2Q + 3) \, dQ \\ &= 140 - \left[1/4Q^2 + 3Q \right]_0^{14} \\ &= 140 - \{ [1/4(14)^2 + 3(14)] - [1/4(0)^2 + 3(0)] \} \\ &= 140 - \{ [1/4(196) + 3(14)] - [1/4(0)^2 + 3(0)] \} \\ &= 140 - [49 + 42] - [0] \\ &= 140 - 91 - 0 \\ &= 49 \end{aligned}$$

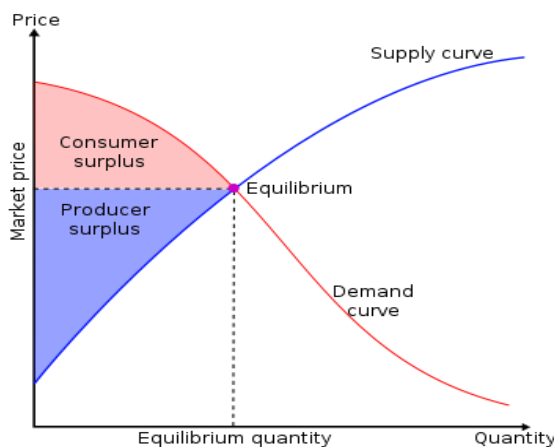
Cara Kedua :

$$\begin{aligned} P_s &= \int_P^{P_e} f(P) \, dP \\ &= \int_3^{10} (-6 + 2P) \, dP \\ &= \left[-6P + P^2 \right]_3^{10} = \{ [-6(10) + 10^2] - [6(3) - 3^2] \} \\ &= [-60 + 100] - [18 - 9] \\ &= 40 - (-9) \\ &= 49 \end{aligned}$$

G. PENERAPAN INTEGRAL TIDAK TENTU PADA SURPLUS KONSUMEN (SK) DAN SURPLUS PRODUSEN (SP) DALAM SATU DIAGRAM

Penerapan integral tidak tentu pada surplus konsumen (SK) dan surplus produsen (SP) dalam satu diagram melibatkan konsep integral dalam konteks ekonomi mikro. Surplus konsumen merupakan selisih antara harga maksimum yang bersedia dibayar oleh konsumen dengan harga pasar yang sebenarnya. Surplus produsen, di sisi lain, adalah selisih antara harga minimum yang bersedia diterima oleh produsen dengan harga pasar yang sebenarnya. Integrasi terjadi ketika kita menggabungkan area di bawah kurva permintaan (demand) dan di atas harga pasar, serta area di bawah kurva penawaran (supply) dan di bawah harga pasar (Mahmudah, 2021). Area integrasi di atas harga pasar memberikan nilai surplus konsumen, sementara area integrasi di bawah harga pasar memberikan nilai surplus produsen. Keseimbangan antara surplus konsumen dan surplus produsen dapat diidentifikasi dengan mencari titik di mana kurva permintaan dan penawaran bertemu. Penerapan integral tidak tentu memungkinkan kita menghitung dengan tepat nilai SK dan SP dalam satu diagram, memahami distribusi kesejahteraan ekonomi, dan melibatkan konsep matematika untuk menganalisis situasi pasar secara menyeluruh (Kusuma, et al 2023).

Surplus konsumen (Consumer's Surplus = Cs dan Surplus Produsen (Producers Surplus) dalam satu diagram



Surplus Konsumen Surplus konsumen (consumers' surplus) mencerminkan suatu keuntungan lebih atau suatu surplus yang dinikmati oleh konsumen tertentu berkenaan dengan tingkat harga pasar suatu barang. Jika tingkat harga pasar adalah P_e , maka bagi konsumen tertentu yang sebetulnya mampu dan bersedia membayar dengan harga lebih tinggi dari P_e hal ini akan merupakan keuntungan baginya, seBAB Ia cukup membayar barang tadi dengan harga P_e . Keuntungan lebih semacam inilah yang oleh Alfred Marshall disebut surplus konsumen. Fungsi permintaan $P = f(Q)$ menunjukkan jumlah sesuatu barang yang akan dibeli oleh konsumen pada tingkat harga tertentu.

Secara geometri besarnya surplus konsumen ditunjukkan oleh luas area dibawah kurva permintaan tetapi diatas tingkat harga pasar. $D(0, P)$ $E = (Q_e, P_e)$ $F(Q, 0)$ $P = f(Q)$ $Q \geq Q_e$ $P_e \geq 0$ p
 Surplus Konsumen (Cs) Surplus konsumen atau Cs (singkatan

dari Consumers' surplus) tak lain adalah segitiga $PeDE$, dengan rentang wilayah yang dibatasi oleh $Q = 0$ sebagai batas bawah dan $Q = Q_e$ sebagai batas atas.

Surplus Produsen adalah harga barang yang dijual oleh produsen, dikurangi dengan biaya produksi barang tersebut. Lebih mudahnya, dapat dikatakan bahwa surplus produsen merupakan ukuran keuntungan yang diperoleh oleh produsen dalam menjual produknya.

Keseimbangan dalam harga pasar diperoleh saat :

$$Q_d = Q_s \text{ atau } P_d = P_s$$

Keterangan :

Q_d = jumlah yang diminta

Q_s = jumlah yang ditawarkan

P_d = harga yang diminta

P_s = harga yang ditawarkan

Contoh Soal :

Surplus Konsumen

1. Fungsi permintaan dari suatu produk adalah $P_d = 120 - 4Q$, dimana P adalah harga per unit produk dan Q adalah jumlah produknya.
 - a) Hitunglah besarnya surplus konsumen jika harga pasarnya adalah Rp. 80 harga per unit!
 - b) Jika harga pasarnya turun dari Rp. 80 menjadi Rp. 60 per unit hitunglah surplus konsumen yang baru!

Penyelesaian :

Persamaan $P_d = 120 - 4Q$ bila di gunakan akan menjadi seperti pada gambar di bawah ini. Jika harga produk Rp 80,

maka jumlah yang diminta 10 unit dan bila harganya turun Rp. 60, maka jumlah diminta menjadi 10 unit.

- a) Besarnya surplus konsumen jika harga pasar Rp. 80 adalah luas area segitiga di bawah kurva permintaan dan di atas garis harga Rp. 80 yaitu sebesar $\{(180 - 80) \times (10)\}/2 = \text{Rp}200$.
- b) Jika harga pasar turun menjadi Rp 60, maka besarnya surplus konsumen adalah luas area segitiga di bawah kurva permintaan dan di atas garis harga Rp 60 yaitu sebesar $\{(120 - 60) \times (15)\}/2 = \text{Rp} 450$

Surplus Produsen

2. Fungsi penawaran dari suatu produk adalah $P_s = 15 + 3Q$ dimana P adalah harga per unit produk dan Q adalah jumlah produk yang di jual.
 - a) Hitunglah besarnya surplus produsen, jika harga pasarnya adalah Rp 60 per unit!
 - b) Jika harga pasarnya naik dari Rp 60 menjadi Rp75 per unit. Hitunglah surplus produsen yang baru!

Penyelesaian :

Persamaan $P_s = 15 + 3Q$ bila di gambarkan akan menjadi seperti pada gambar di bawah ini. Jika harga produk Rp 60 maka jumlah yang di minta 15 unit, dan bila harganya naik Rp 75 maka jumlah yang diminta menjadi 15 unit.

Contoh :

Penawaran dan permintaan suatu barang di pasar masing-masing ditunjukkan oleh persamaan $Q = -30 + 5P$ dan $Q = 60 - 4P$. Hitunglah Surplus Konsumen dan Surplus Produsen.

Penyelesaian :

Fungsi Penawaran $Q = -30 + 5P \Rightarrow -5P = -30 - Q \rightarrow P = 6 + 1/5Q$

Fungsi Permintaan $Q = 60 - 4P \Rightarrow 4P = 60 - Q \rightarrow P = 15 - 1/4Q$

Keseimbangan pasar $Q_s = Q_d$

Yaitu : $-30 - 5P = 60 - 4P$

$$5P + 4P = 60 + 30$$

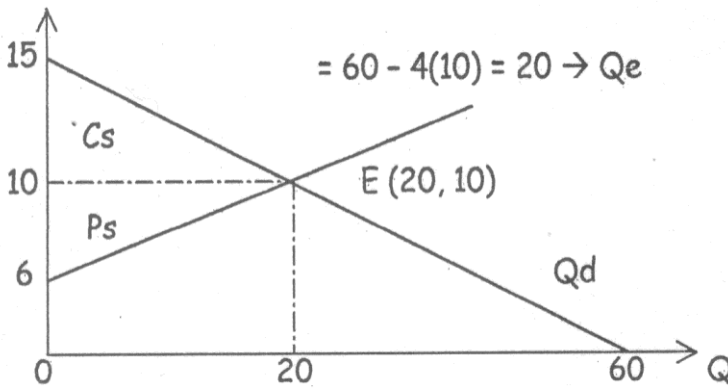
$$9P = 90$$

$$P = 10 \rightarrow P_e$$

maka $Q = 60 - 4P$

$$= 60 - 4(10) = 20 \rightarrow Q_e$$

Gambar :



Surplus Konsumen :

$$C_s = \int_0^{Q_e} f(Q) dQ - Q_e \cdot P_e$$

Surplus Produsen :

$$\begin{aligned} P_s &= Q_e \cdot P_e - \int_0^{Q_e} f(Q) \, dQ \\ &= 20(10) - \int_0^{20} (6 - 1/5Q) \, dQ \\ &= 200 - \left[6Q - 1/10Q^2 \right]_0^{20} \\ &= 200 - [120] + 40 \\ &= 200 - 160 \\ &= 40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_s &= \int_0^{Q_e} f(Q) \, dQ - Q_e \cdot P_e \\ &= \int_0^{20} (15 - 1/4Q) \, dQ - 20 \cdot 10 \\ &= \left[15Q - 1/8Q^2 + 3Q \right]_0^{20} - 200 \\ &= \{ [15(20) - 1/8(20)^2] - [15(0) + 1/8(0)^2] \} - 200 \\ &= [300 - 50] - [0] - 200 \\ &= 250 - 200 \\ &= 50 \end{aligned}$$

H. PENGERTIAN MATRIKS

Matriks adalah suatu himpunan bilangan-bilangan yang disusun dalam baris dan kolom membentuk suatu bangun yang terstruktur. Secara umum, matriks diwakili sebagai array dua dimensi yang terdiri dari elemen-elemen yang dapat berupa angka-angka, simbol, atau parameter lainnya.

Baris dan kolom matriks masing-masing merepresentasikan himpunan data atau variabel-variabel tertentu. Notasi umum untuk menyatakan matriks adalah dengan menggunakan huruf kapital, seperti A, dan elemen-elemen matriks dinyatakan sebagai a_{ij} , dengan i menunjukkan indeks baris dan j menunjukkan indeks kolom. Matriks digunakan dalam berbagai bidang, termasuk aljabar linear, statistika, komputer, dan ilmu lainnya, untuk memodelkan dan menyelesaikan berbagai masalah matematika dan rekayasa (Busrah, 2019).

Matriks ialah kumpulan bilangan yang disajikan secara teratur dalam baris dan kolom yang membentuk suatu persegi panjang,serta terdapat diantara sepasang tanda kurung.

Penulisan matriks secara umum :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Penulisan matrix dapat menggunakan tanda kurung biasa atau tanda kurung siku-siku. Bilangan-bilangan yang terkandung didalam suatu matrix dinamakan unsur. Setiap matrix terdiri atas satu atau sejumlah baris dan satu atau sejumlah kolom; yang jumlahnya tidak harus sama. (m = baris dan n = kolom). Bila 'm = n' dinamakan matrix bujur sangkar(square matrix).

Matrix tidak mempunyai nilai numerik, artinya meskipun matrix merupakan suatu kumpulan bilangan,

tetapi ia sendiri tidak melambangkan suatu bilangan. Matrix dilambangkan dengan huruf besar bercetak tebal, matrik memiliki i baris dan j kolom.

Misal: A_{ij}

Baris $i = 1, 2, 3, \dots, m$

Kolom $j = 1, 2, 3, \dots, n$

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 6 & 3 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -7 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad E = [4 \quad -2 \quad 6] \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 4 & -1 & 5 \\ -2 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

I. PENGERTIAN VEKTOR

Vektor adalah entitas matematika yang memiliki magnitudo (besar) dan arah. Dalam representasi grafis, vektor sering kali diilustrasikan sebagai panah dengan panjang yang menunjukkan magnitudo dan arahnya menunjukkan arah vektor tersebut. Vektor dapat digunakan untuk menggambarkan berbagai konsep, seperti perpindahan dalam fisika, kecepatan, gaya, atau bahkan data dalam bentuk matriks. Vektor dapat dioperasikan melalui berbagai operasi matematika, seperti penjumlahan vektor, perkalian vektor dengan skalar, dan produk dot atau cross untuk menghasilkan hasil yang memiliki interpretasi khusus dalam konteks yang berbeda. Keberagaman aplikasi vektor

menjadikannya konsep penting dalam berbagai bidang, termasuk fisika, matematika, ilmu komputer, dan rekayasa (Handhika, 2020).

Vektor ialah bentuk khusus yang mempunyai satu baris atau satu kolom dan disebut vector baris dan vektor kolom. Vektor baris adalah matrix sebaris atau matrix berbaris tunggal, sedangkan vektor kolom adalah matrix sekolom atau matrix berkolom tunggal.

Suatu vektor biasanya dilambangkan dengan huruf kecil bercetak tebal atau huruf kecil biasa. Vektor pada dasarnya merupakan matrix, yakni matrix berorde $m \times 1$ (vektor kolom) atau $1 \times n$ (vektor baris).

Contoh :

Vektor baris : $a = [2 \quad 4 \quad -5]$ $b = (6 \quad 3 \quad 7)$

Vektor baris : $c = [3 \quad 8 \quad 6]$ $d = (8 \quad 3 \quad 5)$

Vektor kolom : $e = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ $f = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 9 \end{bmatrix}$

Vektor kolom : $g = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ $h = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}$

◆ Kesamaan matrix atau vektor

Dua buah matrix dikatakan sama, dan ditulis $A = B$, bila keduanya berorde sama dan semua unsur (elemen) yang terkandung didalamnya sama. $[a_{ij} = b_{ij} \text{ untuk semua } i \text{ dan } j]$

$A \neq B$ berarti matrix A tidak sama dengan matrix B.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 9 \\ 1 & 9 & 0 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 9 & 11 & 9 \\ 6 & 9 & 6 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 9 \\ 1 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka $A = B$, $B \neq C$, dan $A \neq C$

$D = F$, $D \neq E$, dan $E \neq F$

J. PENGOPERASIAN MATRIKS DAN VEKTOR PADA PENJUMLAHAN

Pengoperasian matriks dan vektor pada penjumlahan melibatkan proses matematis untuk menambahkan elemen-elemen matriks atau vektor. Dalam konteks matriks, penjumlahan dilakukan dengan cara menjumlahkan setiap elemen yang berada pada posisi yang sama dalam matriks yang berbeda (Pujiadi, et al 2016). Misalnya, jika terdapat dua matriks A dan B , penjumlahan dilakukan dengan menjumlahkan $A[1,1]$ dengan $B[1,1]$, $A[1,2]$ dengan $B[1,2]$, dan seterusnya. Hasil penjumlahan ini menghasilkan matriks baru. Untuk vektor, prosesnya serupa, dengan elemen-elemen vektor yang berada pada posisi yang sama dijumlahkan satu per satu. Operasi penjumlahan matriks dan vektor sangat penting dalam berbagai bidang, termasuk dalam pemrograman komputer, statistika, dan ilmu pengetahuan lainnya (Lestari & Rms, 2018).

$$A \pm B = C$$

Dimana : $C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Contoh :

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 8 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Penjumlahan matrix berlaku kaidah komulatif dan asosiatif yaitu :

Kaidah komutatif = $A + B = B + A$

Kaidah Asosiatif = $A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$

K. PENGOPERASIAN MATRIKS DAN VEKTOR PADA PENGURANGAN

Pengoperasian matriks dan vektor pada pengurangan melibatkan proses matematis untuk mengurangi satu matriks atau vektor dari yang lain. Dalam kasus matriks, pengurangan dilakukan dengan mengurangi setiap elemen matriks pertama dari elemen yang sesuai di matriks kedua. Misalnya, jika A dan B adalah dua matriks, hasil pengurangan $A - B$ akan menghasilkan matriks baru C, di mana setiap elemen $C[i][j]$ sama dengan $A[i][j] - B[i][j]$. Sementara itu, pada pengurangan vektor, operasi dilakukan pada elemen-elemen vektor yang sesuai (Lubis, et al 2023). Jika u dan v adalah dua vektor, hasil pengurangan $u - v$ menghasilkan vektor baru w, di mana setiap elemen $w[i]$ sama dengan $u[i] - v[i]$. Penting untuk memastikan bahwa matriks atau vektor yang akan dikurangkan memiliki dimensi

yang sama, sehingga operasi dapat dilakukan pada elemen-elemen yang sesuai. Pengurangan matriks dan vektor adalah salah satu operasi dasar dalam aljabar linear yang banyak digunakan dalam berbagai bidang seperti ilmu komputer, fisika, dan statistika (Pamuji, 2016).

$$A \pm B = C$$

Dimana : $C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -9 & 3 \\ 8 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

L. PENGOPERASIAN MATRIKS DAN VEKTOR PADA PERKALIAN

Pengoperasian matriks dan vektor pada perkalian merupakan konsep dasar dalam aljabar linear yang memiliki aplikasi luas dalam berbagai bidang, termasuk matematika, ilmu komputer, dan fisika. Dalam konteks perkalian matriks, setiap elemen dari matriks hasil diperoleh dengan mengalikan elemen-elemen yang sesuai dari baris matriks pertama dengan kolom matriks kedua, dan hasilnya dijumlahkan. Proses ini memerlukan keterampilan dalam mengatur dimensi matriks yang sesuai agar perkalian dapat dilakukan (Fitrah & Fathurrahman, 2023). Vektor, yang dapat dianggap sebagai matriks satu dimensi, juga dapat dikalikan dengan matriks, mengikuti aturan yang serupa. Keberhasilan perkalian matriks dan vektor ini memiliki dampak signifikan dalam pemrosesan data, pengolahan citra, dan pemodelan

matematika, memberikan dasar untuk berbagai algoritma dan teknik analisis yang kompleks. Dengan pemahaman konsep ini, seseorang dapat mengoptimalkan solusi matematis dan komputasional dalam berbagai aplikasi ilmiah dan teknis (Putri, 2020).

Sebuah matrik bukan berbentuk vektor hanya dapat dikalikan dengan vektor kolom dengan catatan jumlah kolom matrix sama dengan dimensi vektor kolom.

$A_{mn} \cdot b_{n,i} = C_{m,i}$	Dimana $n > 1$
----------------------------------	----------------

Contoh :

1.
$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.3 + (-3).6 + 5.2 \\ 8.3 + 2.6 + 4.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 44 \end{bmatrix}$$

dimensi 2.3 3.1 hasilnya matrix berdimensi 2.1

2.
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.7 + 2.8 \\ 3.7 + 4.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 53 \end{bmatrix}$$

2.2 2.1 2.1

M.BENTUK MATRIKS

Matriks adalah representasi data dalam bentuk tabel berupa susunan baris dan kolom. Setiap elemen dalam matriks diidentifikasi oleh dua indeks, yaitu indeks baris dan indeks kolom. Secara umum, matriks dapat didefinisikan

sebagai kumpulan bilangan atau elemen yang disusun secara terstruktur. Contohnya, matriks 2x3 memiliki dua baris dan tiga kolom. Operasi matematis seperti penjumlahan, pengurangan, dan perkalian dapat dilakukan pada matriks sesuai dengan aturan tertentu. Matriks memiliki peran penting dalam berbagai bidang, seperti aljabar linear, statistika, pemrograman komputer, dan rekayasa. Keberagaman aplikasinya mencakup pemodelan sistem linier, pengolahan citra, analisis data, dan banyak lagi. Dengan representasi yang efisien dan kemampuannya untuk menyederhanakan masalah matematika kompleks, matriks menjadi alat yang sangat berguna dalam berbagai disiplin ilmu (Busrah, 2019).

BENTUK-BENTUK MATRIX

Matrix satuan

Matrix satuan atau matrix identitas adalah matrix bujur sangkar yang semua unsur pada diagonal utama adalah angka 1 (satu). Sedangkan unsur-unsur lainnya 0 (nol). Penulisannya I_n , dimana 'n' mencerminkan ordenya misal I_2 , yaitu matrix satuan berorde 2x2. I_4 yaitu matrix satuan berorde 4x4 dan seterusnya.

Contoh :

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrix Diagonal

Matrix diagonal adalah matrix bujur sangkar yang semua unsurnya nol kecuali pada diagonal utama.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrix nol

ialah matrix yang semua unsurnya nol. Matrix macam ini lazim juga dilambangkan dengan angka "0"

Contoh:

$$0_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 0_{3,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 0_{2,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrix ubahan

Matrix ubahan (transpose matrix) ialah matrix yang merupakan hasil pengubahan matrix lain yang sudah ada sebelumnya.

$$\text{Penulisannya: } A_{m,n} = [a_{ij}] \rightarrow A'_{n,m} = [a_{ij}]$$

Contoh :

$$1) A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow (A'') = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$2) B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow B' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow (B'') = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$3) C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow C' = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow (C'') = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} = C$$

Ubahan dari matrix adalah matrix aslinya. Jadi $(A') = A$, $(B') = B$, $(C') = C$ (sesuai contoh nomor 3).

N. UBAHAN MATRIKS

Ubahan matriks merujuk pada proses perubahan atau modifikasi elemen-elemen dalam suatu matriks. Matriks sendiri adalah kumpulan bilangan yang disusun dalam baris dan kolom. Ubahan matriks dapat terjadi melalui berbagai operasi matematika, seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, atau transformasi lainnya. Setiap elemen matriks dapat diubah sesuai dengan aturan yang berlaku, memungkinkan manipulasi data secara matematis. Perubahan matriks memiliki aplikasi yang luas dalam berbagai bidang, termasuk dalam pemrograman komputer, ilmu data, statistika, dan teknik pengolahan citra. Keberagaman operasi yang dapat dilakukan pada matriks memungkinkan penggunaannya dalam pemodelan dan pemecahan masalah kompleks, serta menyediakan alat yang efektif untuk merepresentasikan dan memanipulasi data multidimensi (Bunga, 2023).

PENGUBAHAN MATRIX

Mengubah sebuah matrix berarti mengubah matrix tersebut menjadi sebuah matrix baru dengan saling menukar posisi unsur – unsur baris dan unsur – unsur kolom, yaitu : $A_{m,n}$ adalah $A'_{n,m}$ sehingga $a_{ij} = a'_{ij}$

Contoh :

$$1) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \text{ menjadi } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$2.3 \qquad \qquad \qquad 3.2$

$$2) \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} \text{ menjadi } \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

$3.2 \qquad \qquad \qquad 2.3$

$$3) \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ menjadi } \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$2.2 \qquad \qquad \qquad 2.2$

❖ **Ubahan Penjumlahan dan Pengurangan**

$$(A_{m,n} \pm B_{m,n} \pm C_{m,n})' = A_{n,m} \pm B_{n,m} \pm C_{n,m}$$

Ubahan dari selisih beberapa matrik adalah jumlah atau selisih matrix– matrix ubahannya.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 8 & 4 & 8 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Maka :

$$\begin{aligned}(\mathbf{A+B+C})' &= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 8 & 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 & 18 & 11 \\ 16 & 10 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 16 \\ 18 & 10 \\ 11 & 24 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

atau

$$\mathbf{A}' + \mathbf{B}' + \mathbf{C}' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 9 & 0 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 16 \\ 18 & 10 \\ 11 & 24 \end{bmatrix}$$

❖ UBAHAN PERKALIAN

Ubahan dari perkalian matrix dengan skalar adalah perkalian skalar dengan matrix ubahannya. Ubahan dari perkalian antar matrix adalah perkalian matrix ubahannya dengan urutan yang terbaik yaitu :

$$(\lambda \mathbf{A})' = \lambda \mathbf{A}'$$

atau :

$$(\mathbf{A}_{m,n} \times \mathbf{B}_{m,n} \times \mathbf{C}_{m,n})' = \mathbf{A}_{m,n} \times \mathbf{B}_{m,n} \times \mathbf{C}_{m,n}'$$

Contoh :

$$\begin{aligned}1). & \left\{ 3 \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \right\} \\ &= 3 \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 & 18 \\ 15 & 9 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 15 \\ 18 & 3 \end{bmatrix} \\ &= 3 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 15 \\ 18 & 3 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

2). Andaikan

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Maka :

$$\begin{aligned} A.B.C &= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4.1+3.4 & 4.2+3.5 & 4.3+3.6 \\ 1.1+2.4 & 1.2+2.5 & 1.3+2.6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 16 & 23 & 30 \\ 9 & 12 & 15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16.7 & + 23.8 & + 30.9 \\ 9.7 & + 12.8 & + 15.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 566 \\ 294 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

O. DETERMINAN MATRIKS

Determinan matriks adalah nilai skalar yang terkait dengan matriks persegi. Nilai ini dapat dihitung dengan aturan tertentu, tergantung pada ukuran matriksnya. Determinan matriks 2x2 dihitung dengan mengalikan elemen-elemen diagonal utama dan mengurangkan hasil perkalian dengan hasil perkalian elemen-elemen diagonal kedua. Untuk matriks 3x3, rumusnya lebih kompleks melibatkan permutasi elemen-elemen matriks. Determinan memiliki sifat penting dalam aljabar linear, seperti menentukan apakah matriks invertible (memiliki matriks

invers) atau tidak. Jika determinan suatu matriks adalah nol, maka matriks tersebut tidak dapat diinvert. Konsep ini memiliki aplikasi luas dalam berbagai bidang, termasuk sistem persamaan linear, transformasi geometris, dan optimas (Anandari, 2023)

DETERMINAN MATRIKS

Ialah penulisan unsur – unsur sebuah matrix bujur sangkar dalam bentuk determinan, yaitu diantara sepasang garis tegak, matrix A maka determinannya $| A |$. Determinan matrix selalu berbentuk bujur sangkar yaitu jumlah baris sama dengan jumlah kolom. Pencarian nilai numerik suatu determinan dapat dilakukan dengan cara mengalirkan unsur – unsurnya secara diagonal.

Misal.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \rightarrow | A | = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} a_{12}$$

Contoh :

$$1). A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow | A | = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = -2$$

$$2). B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow | B | = 4 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 5$$

Determinan berdimensi tiga = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ maka $|A|$, misal;

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1.5.9 + 2.6.7 + 3.8.4 - 7.5.3 - 4.2.9 - 1.6.8$$

P. ADJOIN MATRIKS

Adjoin matriks merupakan suatu proses dalam aljabar linear yang melibatkan penciptaan matriks adjoin dari suatu matriks persegi. Matriks adjoin diperoleh dengan menukar setiap elemen matriks dengan kofaktor yang sesuai, kemudian mentransposisi hasil tersebut. Kofaktor sendiri merupakan hasil perkalian antara koefisien suatu elemen matriks dengan determinan matriks minor yang dihasilkan dengan menghilangkan baris dan kolom yang mengandung elemen tersebut. Matriks adjoin memiliki aplikasi penting dalam berbagai bidang, termasuk sistem persamaan linear, transformasi matriks, dan perhitungan invers matriks. Selain itu, konsep ini juga terkait erat dengan perhitungan determinan dan invers matriks, sehingga memegang peranan penting dalam pemahaman dasar aljabar linear (Supiaty & Hamdani, 2020).

ADJOIN MATRIKS

Adjoin dari suatu matrix adalah ubahan dari matrix kofaktor-kofaktornya.

maka : $\text{Adj. } A = [A^{ij}]'$

Andaikan :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \text{ maka } \text{Adj. } A = [A^{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Maka :

$$M^{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3 \quad M^{12} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -6 \quad M^{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3$$

$$M^{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -6 \quad M^{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -12 \quad M^{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -6$$

$$M^{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3 \quad M^{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -6 \quad M^{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$$

Karena : $A^{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M^{ij}$

$$A^{11} = (-1)^2 \cdot (-3) = -3 \quad A^{12} = (-1)^3 \cdot (-6) = 6 \quad A^{13} = (-1)^4 \cdot (-3) = -3$$

$$A^{21} = (-1)^3 \cdot (-6) = 6 \quad A^{22} = (-1)^4 \cdot (-12) = -12 \quad A^{23} = (-1)^5 \cdot (-6) = 6$$

$$A^{31} = (-1)^4 \cdot (-3) = -3 \quad A^{32} = (-1)^5 \cdot (-6) = 6 \quad A^{33} = (-1)^6 \cdot (-3) = -3$$

Sehingga :

$$[A^{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

Jadi : $\text{Adj}.A = [A^{-1}]'$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

Q. ANALISIS INPUT-OUTPUT

Analisis Input-Output adalah metode ekonomi yang digunakan untuk memahami hubungan antar sektor dalam suatu ekonomi. Metode ini memodelkan aliran barang dan jasa antar berbagai sektor ekonomi, mengidentifikasi dampak perubahan produksi atau konsumsi di satu sektor terhadap sektor-sektor lainnya (Khairona, 2020). Analisis Input-Output melibatkan konstruksi matriks input dan output yang mencerminkan jumlah input yang dibutuhkan oleh setiap sektor untuk memproduksi barang dan jasa, serta output yang dihasilkan oleh setiap sektor. Dengan menganalisis ketergantungan antar sektor ini, analisis Input-Output dapat membantu dalam memprediksi efek ekonomi dari perubahan-perubahan dalam pola produksi atau konsumsi. Metode ini sering digunakan untuk perencanaan ekonomi, evaluasi kebijakan, dan memahami dampak ekonomi dari peristiwa-peristiwa tertentu (Yulianto, et al 2022).

ANALISIS INPUT – OUTPUT

(Analisis Masukan- Keluaran)

Analisis in put-out put (analisis masukan–keluaran) merupakan suatu model matematis untuk menelaah struktur

perekonomian yang saling kait mengait antar sektor atau kegiatan ekonomi dan berguna untuk menganalisis perekonomian secara makro, nasional maupun regional.

Analisis Input Output (IO) adalah analisis mengenai ketergantungan di antara berbagai sektor dan aktivitas ekonomi, baik antar sektor produksi (internal) maupun antara sektor produksi dengan sektor konsumsi akhir. Apabila terdapat perubahan dalam salah satu, beberapa atau semua komponen dalam permintaan akhir akan mengakibatkan perubahan sektor-sektor yang terkait. Misalnya terjadi kenaikan permintaan mobil maka akan mengakibatkan peningkatan permintaan bahan baku mobil (baja, ban, karet, plastik dan sebagainya) di sektor hulu dan (bensin, olie, jasa bengkel, dsb) di sektor hilir. Perubahan pada sektor hulu dan hilir ini akan mengakibatkan perubahan pada sektor-sektor yang terkait dengannya baik langsung maupun tidak langsung, termasuk perubahan permintaan input primer (tenaga kerja) dan income masyarakat.

Model Analisis :

- 1) Analisis IO terbuka artinya dalam analisis yang diperlakukan sebagai sektor endogen hanya sektor produksi, sedangkan sektor sektor rumah tangga dianggap sektor eksogen.
- 2) Sebaliknya adalah analisis IO tertutup. Dalam analisis IO tertutup, di samping sektor produksi, juga memasukkan sektor rumah tangga sebagai sektor endogen.

Matriks yang diperlukan :

Analisis Input Output digunakan berbagai macam matriks. Matriks-matriks dasar yang diperlukan adalah :

1. Matriks Transaksi [Matriks T]
2. Matriks Koefisien Teknologi (Matriks A), dengan elemen a_{ij}
3. Matriks Identitas [Matriks Diagonal I, dengan elemen bernilai 1 pada diagonal utama dan 0 pada elemen lainnya], dengan ordo sama dengan matriks A
4. Matriks Leontief [Matriks $(I-A)$, dengan elemen selisih matriks I dan matriks [A]
5. Matriks Leontief Inverse [Matriks $(I-A)^{-1}$], dengan elemen.

Tabel Input Output (I-O) adalah suatu sistem informasi statistik yang disusun dalam bentuk matriks yang menggambarkan transaksi barang dan jasa antar sektor-sektor ekonomi. Aspek yang ingin ditonjolkan oleh tabel I-O adalah bahwa setiap sektor mempunyai keterkaitan atau ketergantungan dengan sektor lain. Seberapa besar ketergantungan suatu sektor ditentukan oleh besarnya input yang digunakan dalam proses produksinya. (Badan Perencanaan Pembangunan Daerah Kabupaten Kutai Kartanegara, 2007).

Untuk memberikan gambaran Tabel Input-Output, berikut diberikan suatu ilustrasi tabel dengan menyederhanakan suatu sistem ekonomi menjadi tiga sektor produksi. Pada garis horizontal atau baris, isian-isian angka memperlihatkan bagaimana output suatu sektor dialokasikan, sebagian untuk memenuhi permintaan antara (*intermediate demand*) dan sebagian lagi dipakai untuk memenuhi permintaan akhir

(*final demand*). (Badan Perencanaan Pembangunan Daerah Kabupaten Kutai Kartanegara, 2007).

Tabel 1. Ilustrasi Tabel Input-Output

Struktur Input	Alokasi Output	Permintaan Antara			Permintaan Akhir	Jumlah Output
		Sektor Produksi				
Sektor Produksi	1 2 3	X_{11} X_{21} X_{31}	X_{12} X_{22} X_{32}	X_{13} X_{23} X_{33}	F_1 F_2 F_3	X_1 X_2 X_3
Jumlah Input Primer		V_1	V_2	V_3		
Jumlah Input		X_1	X_2	X_3		

Keterangan :

- Permintaan antara : Permintaan antara adalah permintaan terhadap barang dan jasa yang digunakan untuk proses lebih lanjut pada sektor produksi.
- Permintaan akhir : Permintaan untuk konsumsi akhir yang terdiri dari konsumsi rumah tangga, pemerintah, pembentukan modal dan ekspor. Isian angka menurut garis vertikal atau kolom, menunjukkan pemakaian input antara
- Input primer dalam istilah yang lebih populer disebut nilai tambah.

Setiap angka dalam sistem matriks tersebut mempunyai pengertian ganda. Misalnya di **kuadran pertama** yaitu transaksi antara (permintaan antara dan input antara), tiap angka dilihat secara horizontal merupakan alokasi output suatu sektor kepada sektor lainnya, dan pada waktu yang bersamaan dilihat secara vertikal merupakan input dari suatu sektor yang diperoleh dari sektor lainnya.

Manfaat Tabel Input Output

Berdasarkan Bappeda Kabupaten Kutai Kartanegara (2007), tabel I-O sangat bermanfaat bagi para perencana pembangunan maupun kalangan dunia usaha, diantaranya adalah sebagai berikut.

- a. Menyediakan informasi yang lengkap dan menyeluruh tentang struktur penggunaan barang dan jasa di masing-masing sektor serta pola distribusi produksi yang dihasilkan.
- b. Sebagai dasar perencanaan dan analisis makro terutama yang berkaitan dengan produksi, konsumsi, pembentukan modal, ekspor dan impor.
- c. Sebagai kerangka atau model untuk studi-studi kuantitatif, seperti analisis dampak permintaan akhir (konsumsi rumah tangga, konsumsi pemerintah, pembentukan modal dan ekspor) terhadap penciptaan output dan nilai tambah sektoral, tenaga kerja serta ketubuhan impor; proyeksi ekonomi; serta studi-studi yang bersifat khusus lainnya.
- d. Proses penyusunan Tabel I-O sekaligus juga dipakai untuk tujuan pengecekan dan evaluasi terhadap konsistensi data sektoral antar berbagai sumber, sehingga berguna untuk perbaikan dan penyempurnaan data dasar dalam penyusunan pendapatan regional.

Langkah-Langkah Analisis Input Output

a. Matriks Pengganda

Dampak Pengganda adalah suatu dampak yang terjadi baik secara langsung maupun tidak langsung terhadap

berbagai kegiatan ekonomi dalam negeri sebagai akibat adanya perubahan pada variabel-variabel eksogen perekonomian nasional. Untuk menghitung matriks pengganda dilakukan melalui beberapa tahap sebagai berikut.

- b. Menghitung matriks koefisien input (matriks A)

Unsur matriks A dapat dihitung dengan rumus:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}$$

Keterangan :

a_{ij} = koefisien Input sektor ke i oleh sektor ke j

X_{ij} = penggunaan input sektor ke i oleh sektor ke j

X_j = output sektor ke j

- c. Menghitung Matriks (I-A)

Mengurangkan suatu matriks identitas (yaitu matriks dengan diagonal utama bernilai 1 dan unsur-unsur lainnya bernilai 0) terhadap matriks koefisien input.

- d. Menghitung matriks pengganda (B) dan total.

Matriks pengganda (B) dihitung dengan cara menginverskan matriks yang diperoleh pada tahap 2 diatas ($B = (I-A)^{-1}$).

R. MATRIKS TEKNOLOGI

Matriks dalam konteks analisis input dan output dalam teknologi matematika ekonomi adalah representasi tabular yang digunakan untuk mengorganisir dan menganalisis data terkait produksi atau kegiatan ekonomi. Matriks ini membantu

dalam mengidentifikasi hubungan antara berbagai input dan output dalam suatu sistem ekonomi atau proses produksi. Input mencakup faktor-faktor seperti sumber daya, tenaga kerja, dan modal, sedangkan output mencakup hasil produksi atau layanan yang dihasilkan. Dengan menggunakan matriks, kita dapat menghitung kontribusi relatif dari setiap input terhadap output dan menganalisis efisiensi serta efektivitas suatu sistem ekonomi. Teknologi matematika memberikan alat analisis yang kuat untuk memahami dinamika kompleks ini, membantu pengambilan keputusan ekonomi untuk meningkatkan efisiensi dan kinerja keseluruhan sistem (Arhami, et al 2020).

MATRIX TEKNOLOGI

Adalah suatu tabel yang berisi keterangan-keterangan tentang bagaimana matriks dalam satuan kuantitatif fisik ataupun dalam satuan nilai uang. Keluaran suatu sektor terdistribusi ke (diminta oleh) sektor-sektor lain sebagai masukan dan (ke - oleh) pemakai akhir sebagai barang konsumsi.

Dari matriks $(I-A)^{-1}$ inilah nantinya analisis-analisis berikutnya dapat dilakukan. Penjelasannya sebagai berikut :

Dengan memanipulasi persamaan di atas didapat hubungan dasar dari Tabel I-O adalah : $(I - A)^{-1} F = X$, dimana $(I - A)^{-1}$ dinamakan sebagai matriks kebalikan Leontief (matriks multiplier masukan).

Dari sini tampak bahwa besarnya output suatu Sektor X merupakan perkalian antara matriks Leontief Inverse dengan

Final Demand (F). Dengan asumsi koefisien teknologi konstan, maka matriks (I-A)⁻¹ juga konstan, sehingga nilai output sektor j, yaitu X_j hanya tergantung pada perubahan Final demand (F)

Contoh :

Dari tabel Perekonomian Negara Kertagama Buatlah matrix transaksi yang baru jika permintaan akhir yang dikehendaki 100, 300, 200...?

Tabel 1. Perekonomian Negara Kertagama

Keluaran Masukan	pertanian	Industri	jasa	Permintaan akhir	Keluaran total
Pertanian	20	35	5	40	100
Industri	15	80	60	135	290
Jasa	10	50	55	120	235
Nilai tambah	55	125	115	70	369
Keluaran total	100	290	235	396	990

$$a_{ij} = \frac{X_i}{X_j}$$

	P	I	J
Pertanian	0,2	0,12	0,02
Industri	0,15	0,28	0,26
Jasa	0,10	0,17	0,23
Nilai tambah	0,55	0,43	0,49
Σ	1,00	1,00	1,00

Pemakaian total oleh sektor I =

$$X_j = \sum_{i=1}^m X_{ij} + U \quad i = 1, 2, \dots, m+1$$

Keluaran total dari sektor j

$$X_j = \sum_{i=1}^m X_{ij} + y_i \quad j = 1, 2, \dots, m+1$$

➤ **Koefesien teknologi :**

$$a_{ij} = \frac{x_i}{x_j}$$

➤ **Perumusan Matrix Teknologi :**

Yaitu : $U_{m,i} = (I - A)_{m,m} \cdot X_{m,1}$

Jika $I - A$ non singular, yakni jika $|I - A| \neq 0$, maka ia akan mempunyai balikan. Dalam hal ini $X_{m,i} = (I - A)^{-1}_{m,m} \cdot U_{m,i}$

- Berdasarkan Tabel 1. maka matrix teknologi untuk perekonomian tersebut adalah :

- **Koefesien teknologi**

	P	I	J
Pertanian	0,2	0,12	0,02
Industri	0,15	0,28	0,26
Jasa	0,1	0,17	0,23
Nilai tambah	0,55	0,43	0,49
Σ	0,1	1,00	1,00

- Karena matrix Teknologi dibentuk berdasarkan sektor – sektor utama maka :

$$\begin{array}{c}
 \text{Pertanian} \\
 \text{Industri} \\
 \text{Jasa}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{P} \quad \text{I} \quad \text{J} \\
 \left[\begin{array}{ccc}
 0,2 & 0,12 & 0,02 \\
 0,15 & 0,28 & 0,26 \\
 0,1 & 0,17 & 0,23
 \end{array} \right] = A
 \end{array}$$

Menurut rumus $\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{U}$

$$\begin{array}{l}
 \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,2 & 0,12 & 0,02 \\ 0,15 & 0,28 & 0,26 \\ 0,1 & 0,17 & 0,23 \end{bmatrix} \right\} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix} \\
 = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,12 & -0,02 \\ -0,15 & 0,72 & -0,26 \\ -0,1 & -0,17 & 0,77 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\text{adj.}(\mathbf{I} - \mathbf{A})}{|\mathbf{I} - \mathbf{A}|}$$

➤ Langkahnya :

Menghitung adjoin matrik A :

$$A \begin{bmatrix} 0,8 & -0,12 & -0,02 \\ -0,15 & 0,72 & -0,26 \\ -0,1 & -0,17 & 0,77 \end{bmatrix} \text{ caranya :}$$

- ✓ mencari seluruh minor dari matrik A (matrik Teknologi), mulai dari M^{11} sampai M^{33}

✓ mencari seluruh kofaktor dari matrik A (matrik

Tegnologi), Rumus kofaktor $[A^{ij}] = (-1)^{i+j} \cdot M^{ij}$

✓ membuat matrik kofaktor

✓ Adjoin = mengubah matrik kofaktor. $[A^{ij}]$ menjadi $[A^{ji}]'$

- **Determinan** $|I - A| = (0,8).(0,72).(0,77) + (-0,12)(-0,26)$
 $(-0,1) + (-0,02).(-0,17).(-0,15) - (-0,1)$
 $.(0,72).(-0,02) - (-0,15).(-0,12).(0,77)$
 $- (0,8)(-0,26)(-0,17)$
 $= 0,38923$

$$(I - A)^{-1} = \frac{adj.(I - A)}{|I - A|}$$

Adj. (I-A)

$$\begin{matrix} 0,80 & -0,12 & -0,02 \\ -0,15 & 0,72 & -0,26 \\ -0,10 & -0,17 & 0,77 \end{matrix}^{-1} = \begin{matrix} \left[\begin{matrix} 0,5102 & 0,0958 & 0,0456 \\ 0,1415 & 0,6140 & 0,2110 \\ 0,0975 & 0,1480 & 0,5580 \end{matrix} \right] \\ : & 0,38923 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} \left[\begin{matrix} 1,3108 & 0,2461 & 0,1171 \\ 0,3635 & 1,5775 & 0,5421 \\ 0,2505 & 0,3802 & 1,4336 \end{matrix} \right] \\ (I - A)^{-1} \end{matrix}$$

$(I - A)^{-1}$

- Dengan demikian : $X = (I - A)^{-1} \cdot U$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,3108 & 0,2461 & 0,1171 \\ 0,3635 & 1,5775 & 0,5421 \\ 0,2505 & 0,3802 & 1,4336 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 228,33 \\ 618,02 \\ 425,83 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 228,33 \\ 618,02 \\ 425,83 \end{bmatrix}$$

- Jadi keluaran total yang baru masing – masing sektor :

$$\begin{bmatrix} \text{Pertanian} \\ \text{Industri} \\ \text{Jasa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 228,33 \\ 618,02 \\ 425,83 \end{bmatrix}$$

- Nilai tambah yang baru masing-masing sektor menjadi :

$$\text{Pertanian} = 0,55 \times 228,23 = 125,58$$

$$\text{Industri} = 0,43 \times 618,02 = 265,75$$

$$\text{Jasa} = 0,49 \times 425,83 = 208,66$$

- Untuk mengisi tabel matrix transaksi yang baru, maka matrix teknologi dikalikan dengan keluaran total yang baru sehingga menjadi :

$$P \quad I \quad J$$

- Pertanian**

$$\begin{matrix}
 & \begin{matrix} 0,20 & 0,12 & 0,02 \end{matrix} \\
 \begin{matrix} \text{Industri} \\ \text{Jasa} \end{matrix} & \begin{matrix} 0,15 & 0,28 & 0,26 \\ 0,10 & 0,17 & 0,23 \end{matrix}
 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 228,33 \\ 618,02 \\ 425,83 \end{bmatrix}$$

$$0,2 \times 228,33$$

Tabel 2. Matrix Transaksi Yang Baru

Keluaran Keluaran	Pertanian	Industri	Jasa	Permintaan Akhir	Keluaran Total
Pertanian	45,67	74,16	8,52	100	228,23
Industri	34,25	173,05	110,72	300	618,02
Jasa	22,83	105,06	97,94	200	425,83
Nilai Tambah	125,58	265,75	208,66		
Keluaran Total	228,33	618,02	425,83		

	P	I	J
Pertanian	0,2	0,12	0,02
Industri	0,15	0,28	0,26
Jasa	0,1	0,17	0,23
Nilai tambah	0,55	0,43	0,49
Σ	1,00	1,00	1,00

S. METODE CRAMER DALAM PROGRAM LINIER

Metode Cramer adalah salah satu teknik yang digunakan dalam pemecahan masalah program linier. Metode ini memanfaatkan determinan untuk menemukan solusi dari sistem persamaan linear yang mewakili masalah program linier. Dalam konteks program linier, tujuan utama adalah

memaksimalkan atau meminimalkan suatu fungsi tujuan (objektif) yang tergantung pada sejumlah variabel keputusan, dengan mematuhi sejumlah batasan yang juga berupa persamaan linear. Metode Cramer mengaplikasikan teorema determinan untuk menemukan nilai variabel keputusan yang memenuhi kriteria optimal sesuai dengan fungsi tujuan dan batasan-batasan yang ada (Lulut, et al 2022). Prosesnya melibatkan perhitungan determinan matriks koefisien dari sistem persamaan linear tersebut dan memodifikasi matriks tersebut dengan mengganti kolom-kolom yang sesuai dengan nilai variabel keputusan. Namun, penting untuk diingat bahwa Metode Cramer hanya dapat digunakan ketika determinan matriks koefisien utama tidak sama dengan nol, sehingga metode ini memiliki keterbatasan pada beberapa kasus. Meskipun Metode Cramer dapat memberikan solusi analitik untuk masalah program linier, namun dalam prakteknya, metode ini sering kali tidak efisien dan kurang digunakan karena keterbatasannya. Metode pemecahan masalah program linier lainnya, seperti Metode Simpleks, lebih umum digunakan karena lebih efisien dan dapat menangani masalah dengan skala yang lebih besar (Huwaida, 2020).

ATURAN CRAMER

➤ **Penurunan Aturan Cramer $AX = K$**

Dimana : A = Matrix koefisien ($n \times n$)

X = Variabel X_1, X_2, \dots, X_n

Contoh 1 :

Carilah jawaban dari system persamaan berikut ini,

$$2X_1 + 5X_2 = 18$$

$$X_1 + 3X_2 = 10$$

➤ Penyelesaian :

Pertama, buatlah matrix A dan hitunglah $|A|$ dari matrix koefisien, yaitu :

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = 1$$

➤ **Kemudian buatlah $|A_1|$ dan $|A_2|$ dengan cara menggantikan masing-masing vector kolom variable X_1 dan X_2 dengan vector konstanta :**

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 18 & 5 \\ 10 & 3 \end{vmatrix} = 18 \cdot 3 - 10 \cdot 5 = 4 \dots \text{ dan}$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 18 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = 2 \cdot 10 - 1 \cdot 18 = 2$$

➤ Jadi penyelesaian dari persamaan linier adalah :

$$X_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{4}{1} = 4 \text{ dan } X_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{2}{1} = 2$$

➤ **Contoh 2 :**

Carilah jawaban dari system persamaan berikut ini :

$$X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 28$$

$$-X_1 + X_2 + 2X_3 = 14$$

$$3X_1 - X_2 + 5X_3 = 32$$

➤ **Penyelesaian :**

➤ Pertama, buatlah $|A|$ dari matrix koefisien, yaitu :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$|A|$ dg. minor :

$$\begin{aligned} |A| &= 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 23 \text{ atau} \\ &= 1 \cdot \{ 1.5 - (-1).2 \} - 2 \cdot \{ -1.5 - 3.2 \} + 3 \cdot \{ (-1).(-1) - 3.1 \} \\ &= 1.7 - 2.(-11) + 3.(-2) \\ &= 23 \end{aligned}$$

➤ Kemudian **buatlah** $|A_1|$, $|A_2|$ dan $|A_3|$ dengan cara menggantikan masing-masing vector kolom variable X_1 , X_2 dan X_3 dengan vector konstanta,

$$|A_1| = \begin{bmatrix} 28 & 2 & 3 \\ 14 & 1 & 2 \\ 32 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A_1| &= 28 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 14 & 2 \\ 32 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 14 & 1 \\ 32 & -1 \end{vmatrix} = 46 \\ &= 28. (1.5 - (-1).2) - 2. (14.5 - 32.2) + 3. (14(-1) - 32.1) \\ &= 28.7 - 2.6 + 3.(-46) \\ &= 196 - 12 + (-138) = 46 \quad \dots\dots \quad |A_1| \end{aligned}$$

$$|A_2| = \begin{bmatrix} 1 & 28 & 3 \\ -1 & 14 & 2 \\ 3 & 32 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 |A_2| &= 1 \begin{vmatrix} 14 & 2 \\ 32 & 5 \end{vmatrix} - 28 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & 14 \\ 3 & 32 \end{vmatrix} = 92 \\
 &= 1 \cdot \{14 \cdot 5 - 32 \cdot 2\} - 28 \cdot \{(-1) \cdot 5 - 3 \cdot 2\} + 3 \cdot \{(-1) \cdot 32 - 3 \cdot 14\} \\
 &= 1 \cdot 6 - 28 \cdot (-11) + 3 \cdot (-74) \\
 &= 6 + 308 + (-222) = 92
 \end{aligned}$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 28 \\ -1 & 1 & 14 \\ 3 & -1 & 32 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 |A_3| &= 1 \begin{vmatrix} 1 & 14 \\ -1 & 32 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 14 \\ 3 & 32 \end{vmatrix} + 28 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 138 \\
 &= 1 \cdot \{1 \cdot 32 - (-1) \cdot 14\} - 2 \cdot \{(-1) \cdot 32 - 3 \cdot 14\} + 28 \cdot \{(-1) \cdot (-1) - 3 \cdot 1\} \\
 &= 1 \cdot 46 - 2 \cdot (-74) + 28 \cdot (-2) \\
 &= 46 - (-148) + (-56) = 138
 \end{aligned}$$

➤ Penyelesaian dari persamaan linier adalah :

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{46}{23} = 2, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{92}{23} = 4$$

$$\text{dan } x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{138}{23} = 6$$

Jadi : $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ dan $x_3 = 6$

T. METODE ELIMINASI GAUSS JORDAN DALAM PROGRAM LINIER

Metode Eliminasi Gauss-Jordan adalah teknik matematis yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear. Metode ini melibatkan manipulasi baris matriks augmented dari sistem persamaan linear tersebut hingga mencapai bentuk eselon tereduksi atau bentuk matriks identitas. Langkah-langkah utama melibatkan eliminasi unsur-unsur di bawah dan di atas diagonal utama matriks, sehingga menciptakan bentuk segitiga atas. Setelah itu, langkah-langkah eliminasi dilanjutkan hingga mencapai bentuk eselon tereduksi di mana setiap baris memiliki elemen nol di bawah dan di atas diagonal utama. Dengan menggunakan metode ini, kita dapat mengidentifikasi solusi sistem persamaan linear, termasuk kasus-kasus seperti sistem tidak memiliki solusi atau memiliki solusi tak terhingga. Metode ini terutama berguna dalam konteks pemrograman linear di mana penyelesaian sistem persamaan linear menjadi langkah kunci dalam memaksimalkan atau meminimalkan suatu fungsi tujuan yang terkait dengan batasan-batasan tertentu (Sudipa, et al 2023).

METODE ELIMINASI GAUSS-JORDAN

❖ Langkah 1 :

Bentuk persamaan linier ini, ditransformasikan kedalam bentuk matrix koefisien **A**, vector variable **X**, dan vector kolom konstanta **K**, sehingga menjadi :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix}$$

❖ **Langkah 2 :**

- ❖ **Buatlah** matrix perbesaran, yang terdiri dari matrix koefisien **A** dan vector kolom **K**, sehingga menjadi :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} & \mathbf{K}_1 \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} & \mathbf{K}_2 \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} & \mathbf{K}_3 \end{array} \right) \text{ matrix perbesaran}$$

❖ **Langkah 3 dan langkah seterusnya :**

- ❖ Ubahlah matrix koefisien **A**, dengan menggunakan operasi baris sampai menjadi suatu matrix identitas (**I_n**), sehingga menjadi :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{S}_3 \end{array} \right)$$

❖ **Langkah terakhir :**

- ❖ Periksa pada matrix perbesaran diatas, yang terdiri dari matrix identitas (**I_n**) dan vector kolom **S** yang baru, dan hasil akhir dari nilai-nilai **X₁**, **X₂**, dan **X₃** adalah dengan

menyamakan elemen-elemen pada vector kolom **S** yang bersesuaian sehingga menjadi :

$$X_1 = S_1$$

$$X_2 = S_2$$

$$X_3 = S_3$$

Jadi vector kolom **S** inilah, yang merupakan penyelesaian dari metode eliminasi **Gauss-Jordan**

❖ **Contoh 1 :**

❖ Carilah jawaban dari system persamaan berikut ini,

$$2X_1 + 5X_2 = 18$$

$$X_1 + 3X_2 = 10$$

❖ **Penyelesaian :**

❖ Buatlah matrix perbesaran, yang terdiri dari matrix koefisien **A** dan vector kolom **K**, sehingga menjadi :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 18 \\ 1 & 3 & 10 \end{array} \right] \text{ matrix perbesaran}$$

❖ Selanjutnya, selesaikan dengan operasi baris pada matrix perbesaran diatas sampai matrix koefisien menjadi matrix identitas. Langkah-langkahnya sebagai berikut :

❖ **Baris pertama dibagi dengan 2 ($B_1 \div 2$)**

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2/2 & 5/2 & 18/2 \\ 1 & 3 & 10 \end{array} \right]$$

Menjadi :
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2,5 & 9 \\ 1 & 3 & 10 \end{array} \right]$$

❖ Baris kedua dikurangi dengan baris pertama ($B_2 - B_1$)

$$\text{Yaitu : } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2,5 & & 9 \\ 1-1 & 3-2,5 & & 10-9 \end{array} \right]$$

$$\text{Menjadi : } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2,5 & & 9 \\ 0 & 0,5 & & 1 \end{array} \right]$$

❖ Baris kedua dikalikan dengan 2 ($B_2 \times 2$)

$$\text{Yaitu : } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2,5 & & 9 \\ 0.(2) & 0,5.(2) & & 1.(2) \end{array} \right]$$

$$\text{Menjadi : } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2,5 & & 9 \\ 0 & 1 & & 2 \end{array} \right]$$

❖ Baris pertama dikurangi dua setengah kalibaris ke-2

❖ $\{B_1 - 2,5.(B_2)\}$

$$\text{Yaitu : } \left[\begin{array}{ccc|c} 1-2,5.(0) & 2,5-2,5.(1) & & 9-2,5.(2) \\ 0 & 1 & & 2 \end{array} \right]$$

$$\text{Menjadi : } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & & 4 \\ 0 & 1 & & 2 \end{array} \right]$$

Jadi penyelesaian dari system persamaan linier adalah :

$$X_1 = 4 \text{ dan } X_2 = 2$$

Contoh 2 :

Carilah jawaban dari system persamaan berikut ini,

$$X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 28$$

$$-X_1 + X_2 + 2X_3 = 14$$

$$3X_1 - X_2 + 5X_3 = 32$$

➤ **Penyelesaian :**

➤ **Buatlah** matrix perbesaran, yang terdiri dari matrix koefisien **A** dan vector kolom **K**, sehingga menjadi :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 28 \\ -1 & 1 & 2 & 14 \\ 3 & -1 & 5 & 32 \end{array} \right)$$

➤ Selanjutnya, selesaikan dengan operasi baris pada matrix perbesaran diatas sampai matrix koefisien menjadi matrix identitas. Langkah-langkahnya sebagai berikut :

➤ Baris kedua dikurangi negative satu kali baris pertama

{ $B_2 - (-1 \times B_1)$ } dan baris ke-3 dikurangi tiga kali baris pertama { $B_3 - 3(B_1)$ }

Yaitu :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 28 \\ -1-(-1).1 & 1-(-1).2 & 2-(-1).3 & 14-1.28 \\ 3-3.1 & -1-3.2 & 5-3.3 & 32-3.28 \end{array} \right)$$

Menjadi :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 28 \\ 0 & 3 & 5 & 42 \\ 0 & -7 & -4 & -52 \end{array} \right)$$

➤ Baris kedua dibagi dengan tiga { $B_2 \div 3$ }

Yaitu :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 28 \\ 0/3 & 3/3 & 5/3 & 42/3 \\ 0 & -7 & -4 & -52 \end{array} \right)$$

Menjadi:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 28 \\ 0 & 1 & 5/3 & 14 \\ 0 & -7 & -4 & -52 \end{array} \right)$$

- Baris pertama dikurangi dua kali baris kedua $\{B_1 - 2.B_2\}$ dan baris ketiga ditambah tujuh kali baris kedua $\{B_3 + 7.B_2\}$

$$\text{Yaitu : } \left[\begin{array}{ccc|c} 1-2.0 & 2-2.1 & 3-2.5/3 & | 28-2.14 \\ 0 & 1 & 5/3 & | 14 \\ 0+7.0 & -7+7.1 & -4+7.2/3 & | -52+7.14 \end{array} \right]$$

$$\text{Menjadi: } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/3 & | 0 \\ 0 & 1 & 5/3 & | 14 \\ 0 & 0 & 2/3 & | 46 \end{array} \right]$$

- Baris ketiga dikalikan dengan tiga per duapuluh tiga $\{B_3 \times 3/23\}$

$$\text{Yaitu : } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/3 & | 0 \\ 0 & 1 & 5/3 & | 14 \\ 0.(3/23) & 0.(3/23) & 23/3.(3/23) & | 46.(3/23) \end{array} \right]$$

$$\text{Menjadi: } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/3 & | 0 \\ 0 & 1 & 5/3 & | 14 \\ 0 & 0 & 1 & | 6 \end{array} \right]$$

- Baris pertama ditambah dengan baris ketiga $\{B_1 + B_3\}$ dan baris kedua dikurangi dengan baris ketiga $\{B_2 - B_3\}$.

$$\text{Yaitu: } \left[\begin{array}{ccc|c} 1+0 & 0+0 & -1/3+1 & | 0+6 \\ 0-0 & 1-0 & 5/3-1 & | 14-6 \\ 0 & 0 & 1 & | 6 \end{array} \right]$$

$$\text{Menjadi: } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2/3 & | 6 \\ 0 & 1 & 2/3 & | 8 \\ 0 & 0 & 1 & | 6 \end{array} \right]$$

- Baris pertama dikurangi duapertiga kali baris ketiga
{B1 - 2/3.B3}

$$\text{Yaitu: } \left[\begin{array}{ccc|c} 1-2/3.0 & 0-2/3.0 & 2/3-(2/3).1 & | 6-2/3.6 \\ 0 & 1 & -1/3 & | 8 \\ 0 & 0 & 1 & | 6 \end{array} \right]$$

$$\text{Menjadi: } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & | 2 \\ 0 & 1 & -1/3 & | 8 \\ 0 & 0 & 1 & | 6 \end{array} \right] \begin{array}{l} 2 \\ 4 \\ 6 \end{array}$$

- Baris kedua dikalikan baris pertama ditambah satu
{B2 . B1}+1

$$\text{Menjadi: } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & | 2 \\ (0.1) +1 & (0+1) & (2/3.0) +1 & | (8.2)+1 \\ 0 & 0 & 1 & | 6 \end{array} \right]$$

$$\text{Menjadi: } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & | 2 \\ 1 & 1 & 1 & | 17 \\ 0 & 0 & 1 & | 6 \end{array} \right] \begin{array}{l} 2 \\ 4 \\ 6 \end{array}$$

- Baris kedua dikurangi baris pertama {B2 - B1}

$$\text{Menjadi: } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & | 2 \\ 1-1 & 1-0 & 1-0 & | 17-2 \\ 0 & 0 & 1 & | 6 \end{array} \right] \begin{array}{l} 2 \\ 4 \\ 6 \end{array}$$

$$\text{Menjadi: } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & | 2 \\ 0 & 1 & 1 & | 15 \\ 0 & 0 & 1 & | 6 \end{array} \right] \begin{array}{l} 2 \\ 4 \\ 6 \end{array}$$

➤ Baris kedua dikurangi baris pertama ditambah satu

{B2 - B3}

$$\text{Menjadi: } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0-0 & 1-0 & 1-1 & 15-6 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right] \begin{array}{l} 2 \\ 4 \\ 6 \end{array}$$

$$\text{Menjadi: } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right] \begin{array}{l} 2 \\ 4 \\ 6 \end{array}$$

$$\text{Yaitu : } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1/3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right]$$

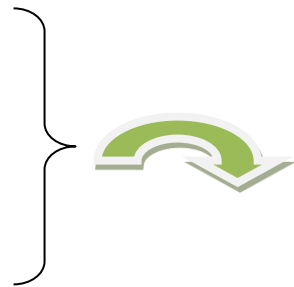
U. METODE SIMPLEK DALAM PROGRAM LINIER

Metode Simpleks adalah sebuah teknik yang digunakan dalam pemecahan masalah program linier untuk mencari solusi optimal. Metode ini dikembangkan oleh George Dantzig pada tahun 1947 dan merupakan salah satu algoritma yang paling umum digunakan dalam optimasi linier (Rumahorbo & Mansyur, 2017). Prinsip dasar dari Metode Simpleks adalah mengiterasi melalui himpunan solusi yang memungkinkan untuk mencapai nilai minimum atau maksimum dari fungsi tujuan, dengan memperhatikan batasan-batasan yang ada. Proses iteratif tersebut dilakukan dengan memindahkan dari satu sudut tumpu ke sudut tumpu lainnya yang meningkatkan nilai fungsi tujuan. Langkah-langkah ini terus diulang hingga solusi optimal ditemukan atau diidentifikasi bahwa tidak ada solusi yang memenuhi

batasan. Metode Simpleks merupakan alat yang efektif dalam menangani masalah program linier kompleks dengan banyak variabel dan batasan (Masudin, et al 2018).

METODE SIMPLEK

Maximumkan $Z = 25X_1 + 15X_2$
 Kendala² $K = 3X_1 + 3X_2 \leq 24$
 $L = 2X_1 + 4X_2 \leq 20$
 $M = 3X_1 \leq 21$
 $X_1, X_2 \geq 0$



- Dengan metode simplek

Model standarnya menjadi : $Z = -25X_1 - 15X_2 = 0$
 $3X_1 + 3X_2 + S_1 = 24$
 $2X_1 + 4X_2 + S_2 = 20$
 $3X_1 + S_3 = 21$
 $X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$

- Tablo berkolom :

Tablo I

VD	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S
Z	1	-25	-15	0	0	0	0
S_1	0	3	3	1	0	0	24
S_2	0	2	4	0	1	0	20
S_3	0	3	0	0	0	1	21

$rs = 24/3 = 8$
 $rs = 20/2 = 10$
 $rs = 21/3 = 7$

- * **Menentukan Variabel pendatang**
yaitu pada nilai Z (baris 2) yang nilai negatifnya paling kecil pada nilai X_1 ($X_1 = -25$)
- * **Menghitung rasio solusi** (rs) ; $24/3 = 8$, $20/2 = 10$, $21/3 = 7$
- * **Menentukan variable perantau** , yaitu pada nilai rasio solusi terkecil, pada rs : $21/3 = 7$

- **Trasformasi baris kunci (X_1 menggantikan S_3) X_1 menjadi**

$$\begin{array}{cccccccc}
 X_1 & 0/3 & 3/3 & 0/3 & 0/3 & 0/3 & 1/3 & 21/3 \\
 \text{Atau } X_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 7
 \end{array}$$

- * **Trasformasi baris -2**

$$\begin{array}{l}
 1 - (-25) \cdot 0 = 1 \\
 -25 - (-25) \cdot 1 = 0 \\
 -15 - (-25) \cdot 0 = -15 \\
 0 - (-25) \cdot 0 = 0 \\
 0 - (-25) \cdot 0 = 0 \\
 0 - (-25) \cdot 1/3 = 25/3 \\
 0 - (-25) \cdot 7 = 175
 \end{array}$$

- * **Trasformasi baris $-S_1$**

$$\begin{array}{l}
 0 - (3) \cdot 0 = 0 \\
 3 - (3) \cdot 1 = 0 \\
 3 - (3) \cdot 0 = 3 \\
 1 - (3) \cdot 0 = 1 \\
 0 - (3) \cdot 0 = 0 \\
 0 - (3) \cdot 1/3 = -1 \\
 24 - (3) \cdot 7 = 3
 \end{array}$$

- * **Trasformasi baris $-S_2$**

$$\begin{array}{l}
 0 - (2) \cdot 0 = 0 \\
 2 - (2) \cdot 1 = 0 \\
 4 - (2) \cdot 0 = 4 \\
 0 - (2) \cdot 0 = 0 \\
 1 - (2) \cdot 0 = 1 \\
 0 - (2) \cdot 1/3 = -2/3 \\
 20 - (2) \cdot 7 = 6
 \end{array}$$

Tablo II

VD	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	S
Z	1	0	-15	0	0	25/3	175
S ₁	0	0	3	1	0	-1	3
S ₂	0	0	4	0	1	-2/3	6
x ₁	0	1	0	0	0	1/3	7

$$rs = 3/3 = 1$$

$$rs = 6/4 = 1,5$$

$$rs = 7/0 = \sim$$

- **Transformasi baris kunci (X₂ menggantikan S₁) X₂, menjadi :**

$$\begin{array}{cccccccc} X_2 & 0/3 & 0/3 & 3/3 & 1/3 & 0/3 & -1/3 & 3/3 \\ \text{Atau } X_2 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & -1/3 & 1 \end{array}$$

Transformasi baris - Z

$$1 - (-15) \cdot 0 = 1$$

$$0 - (-15) \cdot 0 = 0$$

$$-15 - (-15) \cdot 1 = 0$$

$$0 - (-15) \cdot 1/3 = 5$$

$$0 - (-15) \cdot 0 = 0$$

$$25/3 - (-15) \cdot -1/3 = 10/3$$

$$175 - (-15) \cdot 1 = 190$$

Transformasi baris - S₂

$$0 - (4) \cdot 0 = 0$$

$$0 - (4) \cdot 0 = 0$$

$$4 - (4) \cdot 1 = 0$$

$$0 - (4) \cdot 1/3 = -4/3$$

$$1 - (4) \cdot 0 = 1$$

$$-2/3 - (4) \cdot -1/3 = 2/3$$

$$6 - (4) \cdot 1 = 2$$

Transformasi baris - X₁

$$0 - (0) \cdot 0 = 0$$

$$1 - (0) \cdot 0 = 1$$

$$0 - (0) \cdot 1 = 0$$

$$0 - (0) \cdot 1/3 = 0$$

$$0 - (0) \cdot 0 = 0$$

$$1/3 - (0) \cdot -1/3 = 1/3$$

$$7 - (0) \cdot 1 = 7$$

Tablo III. Tablo Optimal

VD	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	S	
Z	1	0	0	5	0	10/3	190	
X ₂	0	0	1	1/3	0	-1/3	1	K
S ₂	0	0	0	-4/3	1	2/3	2	L
X ₁	0	1	0	0	0	1/3	7	M

❖ **Penafsiran tablo Optimal**

Kesimpulan :

- Kolom S menunjukkan nilai-nilai $Z = 190$, $X_2 = 1$, $S_2 = 2$ dan $X_1 = 7$, berarti optimalisasi dicapai pada kombinasi produksi $X_1 = 7$ unit dan $X_2 = 1$ unit, dengan $\pi_{\max} = 190$.
- Terdapat sisa masukkan L yang tidak terpakai sebanyak 2 unit.
- Pada tablo optimal S_1 dan S_2 tidak tercantum dalam VD (variabel Dasar), mencerminkan bahwa pada penyelesaian optimal masukkan K dan M terpakai habis

CATATAN :

➤ **Perkalian matrix berdimensi 3.3 (tiga baris tiga kolom)**

Contoh :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1.10 + 2.13 + 3.16 & 1.11 + 2.14 + 3.17 & 1.12 + 2.15 + 3.18 \\ 4.10 + 5.13 + 6.16 & 4.11 + 5.14 + 6.17 & 4.12 + 5.15 + 6.18 \\ 7.10 + 8.13 + 9.16 & 7.11 + 8.14 + 9.17 & 7.12 + 8.15 + 9.18 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 + 26 + 48 & 11 + 28 + 51 & 12 + 30 + 54 \\ 40 + 65 + 96 & 44 + 70 + 102 & 48 + 75 + 108 \\ 70 + 104 + 144 & 77 + 112 + 144 & 84 + 120 + 162 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 84 & 90 & 96 \\ 201 & 216 & 231 \\ 318 & 333 & 366 \end{pmatrix}$$

➤ **Penyelesaian determinan, dengan Minor & Kofaktor :**

1. **Notasi Minor :** $|A| = a_{11} \cdot M_{11} - a_{12} \cdot M_{12} + a_{13} \cdot M_{13}$

2. **Notasi Kofaktor :** $|A| = a_{11} \cdot A^{11} + a_{12} \cdot A^{12} + a_{13} \cdot A^{13}$

DAFTAR PUSTAKA

- Anandari, A. A. (2023). *Analisis Regresi Deret Fourier: Aplikasi Data Curah Hujan*. CV Jejak (Jejak Publisher).
- Arhami, M., Kom, M., & Muhammad Nasir, S. T. (2020). *Data Mining-Algoritma dan Implementasi*. Penerbit Andi.
- Bunga Merulia, F. R. A. N. S. I. S. C. A. (2023). Analisis Dampak Perubahan Luas Lahan Terbuka Tambang Batu Di Kecamatan Sukabumi Kota Bandar Lampung Menggunakan Citra Landsat 8.
- Busrah, Z. (2019). *Matematika Komputasi Berbasis Pemrograman Matlab*.
- Catio, M. (2020). *Manajemen sumber daya manusia. Asep Rachatullah. Indigo Media. Tangerang.*
- Fitrah, M., & Fathurrahman, F. (2023). *Matematika Diskrit: Berbasis Hasil Penelitian Pada Ilmu Komputer*. PT. Sonpedia Publishing Indonesia.

- Handhika, J. (2020). *Buku Fisika untuk Mahasiswa*. CV. AE Media Grafika.
- Huwaida, H. (2020). *Program Linier*. Deepublish.
- Huzaemah, M. (2016). *Teori Konsumsi Dalam Ekonomi Mikro (Analisis Kritis Dalam Perspektif Ekonomi Islam)*. Skripsi UIN Alauddin Makassar.
- Kadim, A. (2017). *Penerapan Manajemen Produksi & Operasi di Industri Manufaktur*.
- Khairona, M. A. (2020). *Analisis Kategori Dampak Lingkungan Proses Pembuatan Cup Polystyrene Menggunakan Metode Life Cycle Assessment* (Doctoral dissertation, Universitas Islam Indonesia).
- Krisnandi, H., Efendi, S., & Sugiono, E. (2019). *Pengantar manajemen*.
- Kusuma, J. W., Hamidah, M. P., Kurdhi, N. A., Sunarta, D. A., SH, M., Nalle, M. N., ... & Ak, M. (2023). *Matematika Ekonomi dan Bisnis*. Cendikia Mulia Mandiri.
- Lestari, D., & RMS, A. S. (2018). Penentuan Karyawan Kontrak Menjadi Karyawan Tetap PT. Timbang Deli Dengan Metode Analytical Hierarchy Process (AHP). *Teknologi*, 8(2).
- Lubis, R. A., Pangabea, E. M., & Irvan, I. (2023). Peranan Struktur Aljabar Dalam Pemodelan Sistem Skor Dalam Olahraga Tennis. *Innovative: Journal Of Social Science Research*, 3(3), 4751-4760.
- Lulut Alfaris, S. T., Dewadi, F. M., Abdul Munim, S. E., Taba, H. T., Khasanah, S. P., Kom, M., ... & Rukhmana, T. (2022). *Matriks Dan Ruang Vektor*. Cendikia Mulia Mandiri.

- Mahmudah, M. (2021). Manajemen Pembiayaan Bank Syariah.
- Masudin, I., Ibrahim, M. F., & Yandeza, G. (2018). *Linear Programming Dengan R:(Aplikasi Untuk Teknik Industri)*. UMMPress.
- Mesra, B. (2016). *Penerapan Ilmu Matematika dalam Ekonomi dan Bisnis*. Deepublish.
- Pamuji, I. M. T. (2016). *Alat Bantu Ajar Eigen Vektor Berbasis Multimedia Interaktif* (Doctoral dissertation, UII).
- Pujiadi, P., Wibawa, A. D., & Marfuah, M. (2016). Guru pembelajar modul matematika SMA: kelompok kompetensi I teknik penilaian dalam pembelajaran, matriks dan vektor.
- Putri, O. N. (2020). Implementasi Metode Cnn Dalam Klasifikasi Gambar Jamur Pada Analisis Image Processing (Studi Kasus: Gambar Jamur Dengan Genus Agaricus Dan Amanita).
- Ramadhanty, D., Kustiawati, D., Fakhrezi, F., & Dalimunte, M. R. (2023). Implementasi Integral dalam Bidang Ekonomi di Indonesia. *Etnik: Jurnal Ekonomi dan Teknik*, 2(1), 35-46.
- Rumahorbo, R. L., & Mansyur, A. (2017). Konsistensi metode simpleks dalam menentukan nilai optimum. *Karismatika: Kumpulan Artikel Ilmiah, Informatika, Statistik, Matematika dan Aplikasi*, 3(1).
- Safri, H. (2018). Pengantar Ilmu Ekonomi. *Lembaga Penerbit Kampus IAIN Palopo*, 3-4.
- Sari, M. E., Hasanah, N., Purba, O. N., Napitupulu, R. A., Kelen, W. M., Tampubolon, M., ... & Stephane, I. (2022). *Matematika Dasar*. Global Eksekutif Teknologi.

- Sudipa, I. G. I., Wardoyo, R., Hatta, H. R., Sagena, U., Gunawan, I. M. A. O., Zahro, H. Z., & Adhicandra, I. (2023). *Multi Criteria Decision Making: Teori & Penerapan Metode Pengambilan Keputusan dengan MCDM*. PT. Sonpedia Publishing Indonesia.
- Supiati, A. C. A., & Hamdani, H. M. (2020). *Identifikasi Kesalahan Siswa Dalam Menyelesaikan Soal Invers Matriks Dikelas XI SMA Negeri 3 Palangka Raya* (Doctoral dissertation, Universitas Palangka Raya).
- Yulianto, I., Budiarmo, R., & Subiyantoro, H. (2022). Analisis Dampak Dan Kinerja Program Penugasan Khusus Ekspor (National Interest Account) Industri Ka Pada Perekonomian Indonesia. *Jurnal Perspektif Bea dan Cukai*, 6(1), 1-27.

TENTANG PENULIS



Retno Muslinawati, S.E., M.M.

Merupakan akademisi yang memiliki jejak panjang dalam dunia pendidikan tinggi, dengan profil yang mencerminkan komitmen dan keberhasilannya dalam mengembangkan bidang Ekonomi Pembangunan. Penulis dilahirkan di Purbalingga pada 3 Agustus 1965, perjalanan pendidikannya dimulai dengan berhasil meraih gelar Sarjana (S1) dari Universitas Wijayakusuma Purwokerto pada tahun 1988, dan semangat pendidikannya terus berkobar ketika meraih gelar Magister Manajemen (MM) dari Universitas Dr. Sutomo Surabaya pada tahun 2003.

Karir akademisnya yang signifikan tercermin dalam perannya sebagai dosen tetap di Program Studi Ekonomi Pembangunan, Universitas Bojonegoro, sejak tahun 1995 hingga saat ini. Sebagai seorang pendidik, Retno Muslinawati

terlibat dalam membimbing dan memberikan pengetahuan kepada mahasiswa di bidang Ekonomi Pembangunan. Dedikasinya terhadap pengembangan ilmu pengetahuan dan pendidikan tampak jelas melalui keberadaannya yang teguh sebagai dosen tetap di Universitas Bojonegoro.

Profilnya bukan hanya mencerminkan keberhasilannya dalam meniti karier akademis, tetapi juga menunjukkan kontribusi berarti dalam memajukan bidang Ekonomi Pembangunan. Dengan latar belakang pendidikan yang kuat dan pengalaman panjangnya di dunia pendidikan tinggi, Retno Muslinawati menjadi sosok yang dapat memberikan inspirasi dan kontribusi penting bagi perkembangan ilmu pengetahuan, terutama di bidang yang menjadi fokusnya.

TENTANG EDITOR



Dimas Surya Atmaja

Lahir pada 29 Juli 2004 di Lamongan, editor buku ini adalah mahasiswa yang berkemampuan dengan bakat dan dedikasinya yang luar biasa. Meskipun masih berusia muda, Dimas telah mengukir jejaknya dalam dunia akademis, khususnya di ranah buku, penelitian dan pengabdian. Saat ini, ia masih menempuh pendidikan di Universitas Bojonegoro, mengambil jurusan S1 Ekonomi Pembangunan di Fakultas Ekonomi. Dimas tidak hanya terbatas pada dunia akademis, namun juga membuktikan kemampuannya dalam mengolah kata-kata dan konten tulisan. Dengan tempat tinggalnya di Lamongan,

Dimas menjalin hubungan erat dengan komunitas lokal dan terus menginspirasi teman-temannya dengan kreativitas-

nya. Kemampuannya dalam hal ini tidak hanya melibatkan aspek tata bahasa dan struktur, tetapi juga mampu menyampaikan pesan dan cerita secara efektif kepada pembaca. Selain itu, Dimas Surya Atmaja juga memiliki minat mendalam dalam ekonomi pembangunan, yang mungkin memberikan dimensi tambahan pada pendekatannya terhadap teks dan narasi yang ia buat. Dengan semangatnya yang tinggi dan semakin berkembangnya keterampilan, Dimas diharapkan akan terus berkontribusi dalam mengangkat kualitas karya-karya tulis di dunia ilmu pengetahuan, menciptakan dampak positif dalam literasi dan pengembangan masyarakat di sekitarnya.

MATEMATIKA EKONOMI II

Penyusunan buku "Matematika Ekonomi 2" memiliki relevansi yang signifikan bagi pembaca, khususnya mahasiswa bidang ekonomi pembangunan. Buku ini tidak hanya menyediakan landasan matematika yang diperlukan dalam pemahaman konsep ekonomi, tetapi juga membantu mengaitkan teori-teori ekonomi dengan alat matematika yang sesuai. Dalam konteks ekonomi pembangunan, pemahaman matematika menjadi krusial dalam menganalisis data ekonomi, merumuskan model ekonomi, dan mengambil keputusan yang efektif dalam perencanaan pembangunan.

Melalui buku ini, pembaca dapat memperoleh kemampuan dalam menerapkan konsep matematika pada situasi ekonomi nyata, seperti analisis pertumbuhan ekonomi, distribusi pendapatan, dan evaluasi kebijakan pembangunan. Dengan demikian, penyusunan buku "Matematika Ekonomi 2" bukan hanya membantu pembaca memahami aspek teknis, tetapi juga mendukung pengembangan keterampilan analitis yang sangat dibutuhkan dalam menyusun kebijakan ekonomi yang berkelanjutan dan inklusif dalam konteks pembangunan.

Kemampuan memahami Matematika Ekonomi 2 menjadi keterampilan krusial bagi pembaca, khususnya mahasiswa di bidang ekonomi. Matematika Ekonomi 2 memberikan dasar yang kokoh untuk analisis ekonomi dan pengambilan keputusan yang informasional dan tepat. Pembaca perlu memahami konsep-konsep matematika seperti integral, matriks dan analisis input-output yang diterapkan dalam konteks ekonomi. Kemampuan ini memungkinkan mereka menginterpretasikan dan menganalisis data ekonomi, merumuskan model matematis untuk fenomena ekonomi, serta menguasai alat analisis yang mendukung pengambilan keputusan yang efektif dalam berbagai konteks ekonomi. Dengan memahami buku Matematika Ekonomi 2 ini, pembaca dapat mengembangkan keterampilan analitis yang diperlukan untuk mengeksplorasi dan memecahkan masalah ekonomi, serta memberikan landasan yang kuat untuk pemahaman konsep-konsep lanjutan dalam mempelajari ekonomi lebih lanjut.

